DOSSIER SEMANAL 17

MATEMÁTICAS II

Por Pedro A. Martínez

PROBLEMA 1: **Representa gráficamente** la función $f(x)=\dfrac{Ln\ x}{x}$. Razona la representación analizando su dominio, continuidad, cortes con los ejes coordenados, simetrías, asíntotas, monotonía y curvatura.

1. **DOMINIO**: El dominio de la función es $D[f(x)]=]0,+\infty[$. Ya que el logaritmo sólo está definido para números positivos. Además, por otro lado, el denominador se anularía en x=0.

2. **CONTINUIDAD**: La función $f(x)$ es continua en todo su dominio.

3. **SIMETRÍAS**: Dado que la función no está definida para los números negativos, no posee ningún tipo de simetría.

4. **CORTES CON LOS EJES COORDENADOS**:

Corte con el eje OY: $x=0$ $\Rightarrow$ No corta al eje OY ya que x=0 no pertenece al dominio

Corte con el eje OX: $\dfrac{Ln\ x}{x}=0 \quad\Rightarrow\quad Ln\ x=0 \quad\Rightarrow\quad x=1 \quad\Rightarrow\quad A(1,0)$

Así pues, el único punto donde la función corta a los ejes coordenados es en el punto $A(1,0)$.

5. **ASÍNTOTAS**:

5.1. **Asíntotas verticales**: Se buscan y estudian en aquellos puntos problemáticos respecto al dominio. En este caso cuando x tiende a cero por la derecha (ya que por la izquierda no hay ninguna función definida).

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{Ln\ x}{x}=\left[\frac{-\infty}{0}\right]=-\infty$$

5.2. **Asíntotas horizontales**: Para saber si una función tiene asíntotas horizontales ha de estudiarse su comportamiento en el infinito.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{Ln\ x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\ INDETERMINACIÓN \right] = \left[\begin{matrix} Aplicando \\ L'Hôpital... \end{matrix} \right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

En este caso sólo tenemos una asíntota horizontal en $y = 0$ cuando $x \to +\infty$. Cuando $x \to -\infty$ no hay asíntota horizontal ya que la función no está definida para valores negativos de la variable dependiente.

5.3. **Asíntotas oblicuas**: Sabemos que si una función tiene asíntota horizontal entonces no presentará asíntota oblicua. En este caso, cuando $x \to +\infty$ la función presenta una asíntota horizontal y por tanto sabemos que no habrá oblicua.

6. **PERIODICIDAD**: La función propuesta no tiene ningún tipo de periodicidad.

7. **MONOTONÍA**: Realicemos el estudio de la primera derivada:

$$f(x) = \frac{Ln\ x}{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1 - Ln\ x}{x^2}$$

Igualamos la derivada a cero para obtener los puntos críticos:

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1 - Ln\ x}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - Ln\ x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = e$$

Analizaremos ahora la monotonía de la función:

	0	e	$+\infty$
Signo de f'(x)	+		-
Monotonía de f(x)	↗		↘

Así pues, la función presenta un máximo absoluto en $\left(e, \frac{1}{e}\right)$. Es creciente en el intervalo $(0, e)$ y decreciente en el intervalo $(e, +\infty)$.

8. **CURVATURA**: Realicemos el estudio de la segunda derivada:

$$f'(x)=\frac{1-Ln\ x}{x^2} \quad \Rightarrow \quad f''(x)=\frac{-x^2\cdot\frac{1}{x}-2x\cdot(1-Ln\ x)}{x^4}=\frac{-x-2x\cdot(1-Ln\ x)}{x^4}=$$

$$=\frac{x[-1-2\cdot(1-Ln\ x)]}{x^4}=\frac{-3+2Ln\ x}{x^3}$$

Igualamos la segunda derivada a cero para obtener los posibles puntos de inflexión:

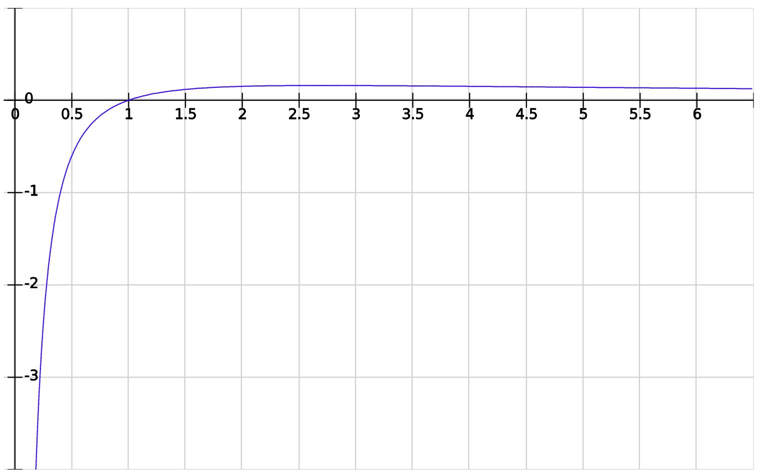
$$f''(x)=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-3+2Ln\ x}{x^3}=0 \quad \Rightarrow \quad Lnx=\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad x=e^{3/2}$$

Analizaremos ahora la monotonía de la función:

	0 — $e^{3/2}$	$e^{3/2}$ — $+\infty$
Signo de f''(x)	+	-
Curvatura de f(x)	$\cup$	$\cap$

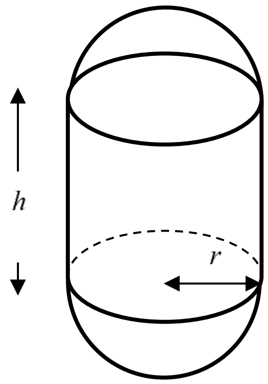
Así pues, la función presenta un punto de inflexión en $\left(e^{3/2}, \frac{3}{2e^{3/2}}\right)$. Es convexa en el intervalo $(0, e^{3/2})$ y cóncava en el intervalo $(e^{3/2}, +\infty)$.

Con esta información, se tiene que la representación gráfica de la función propuesta es:



PROBLEMA 2: El *Jet Propulsion Laboratory* de la NASA desea construir una cápsula espacial. Por motivos dinámicos, quieren que la nave sea cilíndrica y rematada por dos semiesferas para minimizar el efecto del rozamiento. Esta cápsula estará destinada a transportar 300 litros de combustible para la estación EZ-549 que rota alrededor del planeta. Ahora bien, debido a que el material destinado a la construcción de la cápsula es muy caro, desean que el coste de elaboración sea lo más económico posible. Bajo estas condiciones, **¿cuáles deben ser las dimensiones de la cápsula?**

Paso 1: Realizar una representación gráfica o simbólica.



Paso 2: Identificación de la función objetivo

En este caso, nuestra función objetivo será el área de la cápsula, el cual deseamos que sea mínima.

Paso 3: Creación de variables.

r: radio (en dm) de la base del cilindro.

h: altura (en dm) del cilindro

Paso 4: Construcción analítica de la función objetivo.

En este caso, nuestra función objetivo será el área de la pared del cilindro circular recto más la de una esfera, es decir:

$$A(r,h) = 2\pi\, r\, h + 4\pi\, r^2$$

Paso 5: Determinación de la condición de ligadura entre las variables que aparecen en la función objetivo. En este caso, la condición de ligadura viene determinada por el volumen de la cápsula. Así pues: $V(r,h) = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 + \pi \cdot r^2 \cdot h$

$$\frac{4}{3}\pi\cdot r^3+\pi\cdot r^2\cdot h=300 \quad\Rightarrow\quad h=\frac{300-\frac{4}{3}\pi\cdot r^3}{\pi\cdot r^2} \quad\Rightarrow\quad h=\frac{300}{\pi\cdot r^2}-\frac{4}{3}r$$

Sustituyendo en la función objetivo:

$$A(r,h)=2\pi\, r\, h+4\pi\, r^2 \quad\Rightarrow\quad A(r)=2\pi\, r\left(\frac{300}{\pi\cdot r^2}-\frac{4}{3}r\right)+4\pi\, r^2 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad A(r)=\frac{600}{r}-\frac{8}{3}\pi\, r^2+4\pi\, r^2 \quad\Rightarrow\quad A(r)=\frac{600}{r}+\frac{4}{3}\pi\, r^2$$

Paso 6: Ahora que la función objetivo depende de una única variable, **derivamos y calculamos los extremos relativos** (máximos o mínimos)

$$A(r)=\frac{600}{r}+\frac{4}{3}\pi\, r^2 \quad\Rightarrow\quad A(r)=\frac{-600}{r^2}+\frac{8}{3}\pi\, r$$

Igualamos a cero la derivada y obtenemos los puntos críticos:

$$\frac{-600}{r^2}+\frac{8}{3}\pi\, r=0 \quad\Rightarrow\quad -1800+8\pi\, r^3=0 \quad\Rightarrow\quad r=\sqrt[3]{\frac{1800}{8\pi}}=\sqrt[3]{\frac{225}{\pi}}\approx 4.15\ dm$$

Construimos una tabla con los posibles valores de la variable r para determinar cuál es el valor que resuelve nuestro problema.

	0 — $\sqrt[3]{\frac{225}{\pi}}$	$\sqrt[3]{\frac{225}{\pi}}$ — $+\infty$
Signo de $V'(x)$	-	+
Monotonía de $V(x)$	↘	↗

Por tanto, el valor mínimo para el área se alcanzará en $r=\sqrt[3]{\frac{225}{\pi}}$

Paso 7: Proporcionar explícitamente la solución del problema.

A la vista de los resultados, vemos que para que la cápsula tenga la mínima superficie posible, su radio debe valer:

$$r = \sqrt[3]{\frac{225}{\pi}} \quad dm$$

y su generatriz:

$$h = \frac{300}{\pi \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{225}{\pi}}\right)^2} - \frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{225}{\pi}} \quad dm$$

PROBLEMA 3: Estudia la **continuidad** de la función $f(x)$ y esboza su gráfica:

$$f(x)=\left|3x^2+9x-12\right|$$

Tenemos dos posibilidades de resolver este problema. Un razonamiento más rápido y sencillo, pero otro algo más tedioso. Comencemos con el sencillo:

RAZONAMIENTO 1:

Es fácil observar que la función $f(x)$ es continua ya que es composición de funciones continuas (los polinomios y la función "valor absoluto" son continuas, por lo que su composición también lo será). Así pues, $f(x)$ es continua para todos los números reales.

Para la representación gráfica simplemente hemos de tener presente el efecto que el valor absoluto causa sobre la función que contiene como argumento. El valor absoluto refleja la gráfica de su argumento sobre la parte positiva del eje OX. Así pues, dado que la función que aparece dentro del valor absoluto es una parábola, simplemente hemos de representarla y tras ello reflejarla en la parte positiva del eje OX.

$$g(x)=3x^2+9x-12$$

Vértice de la parábola:

$$x_v=-\frac{b}{2a}=\frac{-9}{6}=-\frac{3}{2} \qquad y_v=3\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2+9\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)-12=-\frac{75}{4} \qquad \Rightarrow \quad V\left(-\frac{3}{2},-\frac{75}{4}\right)$$

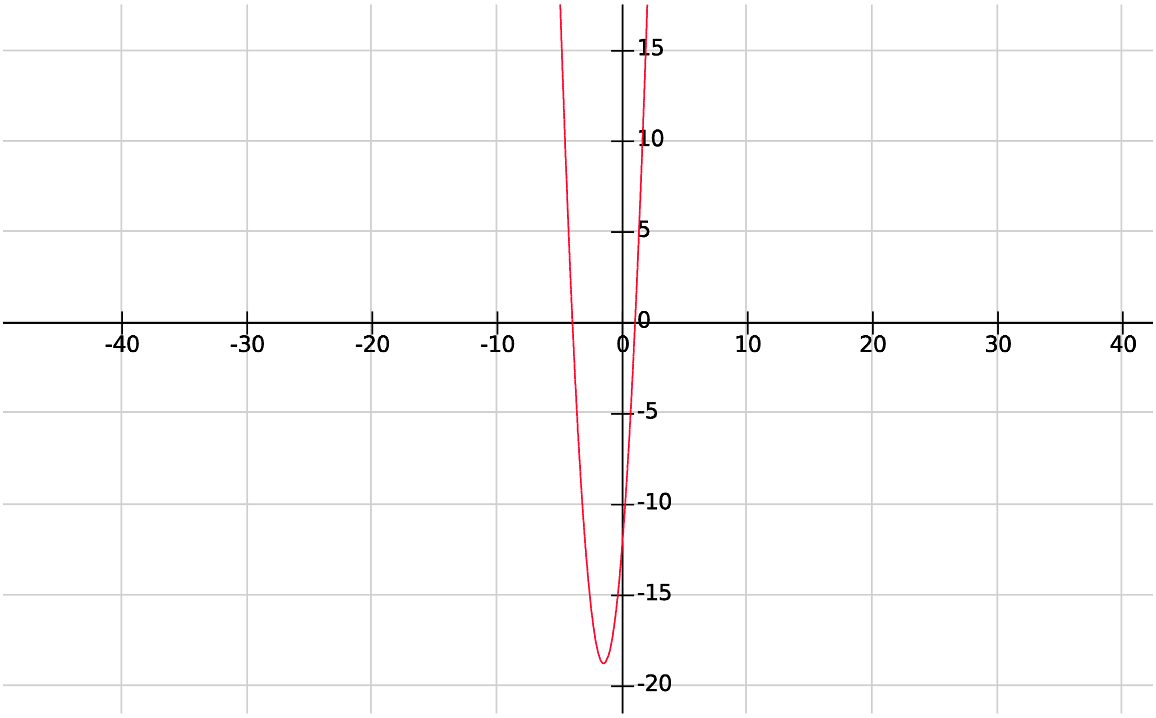
Cortes con el eje OX:

$$3x^2+9x-12=0 \quad \Rightarrow \quad x^2+3x-4=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{-3\pm 5}{2}=\begin{cases} x=1 \\ x=-4 \end{cases}$$

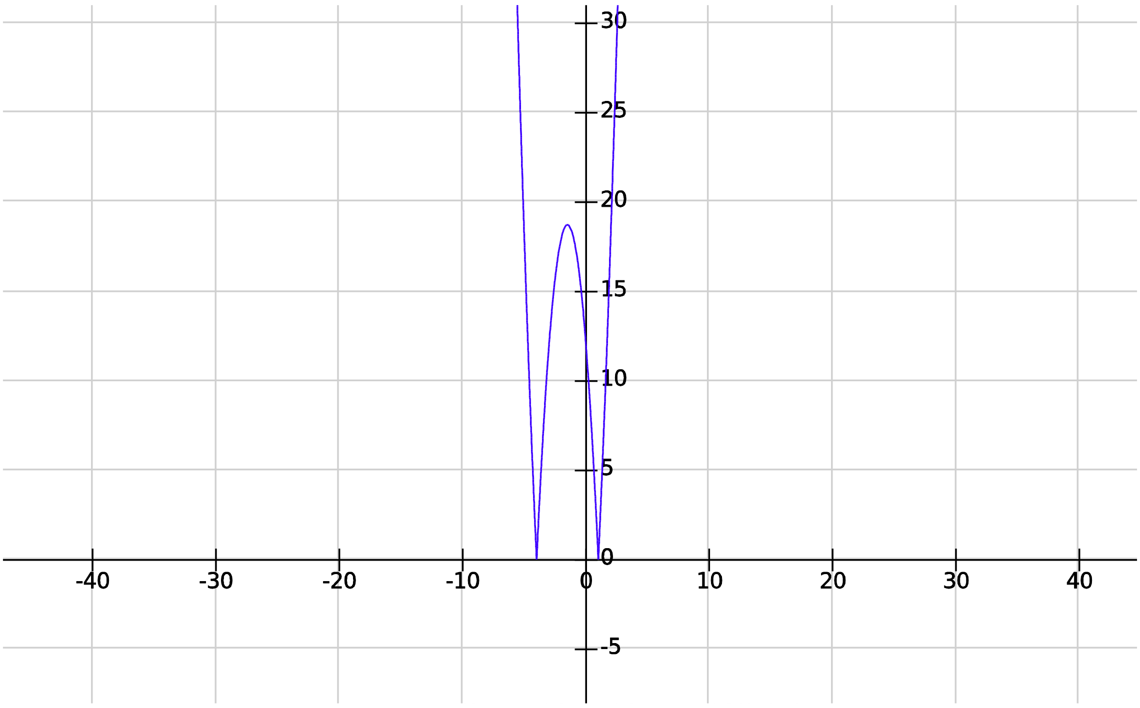
Cortes con el eje OY:

$$g(0)=3\cdot 0^2+9\cdot 0-12=-12$$

Así pues, una representación aproximada de la parábola es:



Así pues, reflejando la función sobre el eje OX, obtenemos la función deseada:



RAZONAMIENTO 2:

Se basa en definir la función $f(x)$ previamente como una nueva función definida a trozos. Estudiemos el signo del argumento del valor absoluto:

$$3x^2+9x-12=0 \quad\Rightarrow\quad x^2+3x-4=0 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{-3\pm 5}{2}=\begin{cases} x=1 \\ x=-4 \end{cases}$$

	$-\infty$ to -4	-4 to 1	1 to $+\infty$
Signo de $g(x)=3x^2+9x-12$	+	-	+

Así pues, la función $f(x)$ puede escribirse como:

$$f(x)=\left|3x^2+9x-12\right|=\begin{cases} 3x^2+9x-12 & x<-4 \\ -3x^2-9x+12 & -4\le x\le 1 \\ 3x^2+9x-12 & x>1 \end{cases}$$

Dado que todos los tramos son polinómicos, podemos asegurar que el dominio de la función es todo el conjunto de los números reales y que además es siempre continua salvo, a lo sumo, en los puntos de cambio, soldadura o transición. Analicémoslos:

- Para $x=-4$

$$\left.\begin{array}{l} f(-4)=3\cdot 16-36-12=0 \\ \lim\limits_{x\to -4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -4^-} 3x^2+9x-12=0 \\ \lim\limits_{x\to -4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -4^+} -3x^2-9x+12=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(x) \text{ es continua en } x=-4$$

- Para $x=1$

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=3\cdot 1+9-12=0 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} -3x^2-9x+12=0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} -3x^2-9x+12=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(x) \text{ es continua en } x=1$$

Así pues, la función es continua para cualquier valor real de x. La representación sería igual que la realizada en el razonamiento 1.