DOSSIER SEMANAL 11

MATEMÁTICAS II

Por Pedro A. Martínez

PROBLEMA 1: Considera los planos dados por las ecuaciones:

$$\pi_1:\ x+y+3z=5 \qquad \pi_2:\ x+mz=m \qquad \pi_3:\ 2x+my=0$$

donde m es un parámetro real. Se pide:

a) Determina la **posición relativa** de los planos en función del parámetro real m

b) Para $m=2$ determina el **punto de intersección** de los tres planos.

c) Para $m=0$ obtén la ecuación **paramétrica** de la recta en la que se intersectan los tres planos.

a) Determinar la posición relativa de los planos equivale a discutir el sistema formado por los mismos. Así pues, consideraremos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+3z=5 \\ x+mz=m \\ 2x+my=0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & m & m \\ 2 & m & 0 & 0 \end{array}\right)=A^*$$

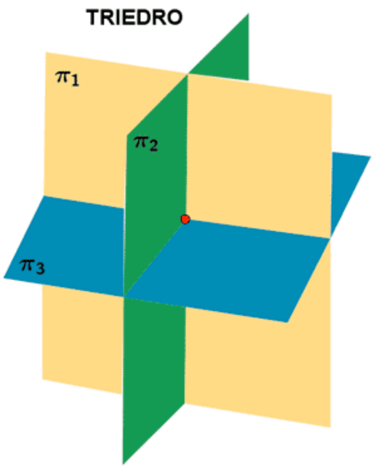
Comenzaremos analizando el rango de la matriz de coeficientes, A. Para ello, calcularemos el valor de su determinante en función del parámetro real m:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & m \\ 2 & m & 0 \end{vmatrix}=2m+3m-m^2=5m-m^2=m\cdot(5-m)$$

Para discutir el rango de la matriz debemos averiguar qué valores del parámetro m, anulan este determinante. Es decir:

$$|A|=m\cdot(5-m)=0 \Rightarrow \quad m=0 \ \text{ó} \ m=5$$

Esto nos permite **distinguir tres casos posibles**:

<table>
<tr><th colspan="2">CASO I: $m \neq 0 \;\; y \;\; m \neq 5$</th></tr>
<tr><td>$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & m & m \\ 2 & m & 0 & 0 \end{array}\right)$</td><td>En este caso, los rangos de la matriz ampliada y de coeficientes coinciden con el número de incógnitas, motivo por el cual, según el Teorema de Rouchè-Fröbenius quedaría clasificado como <u>SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO</u>.
$$R(A) = R(A^*) = 3 = NUM.INCÓGNITAS$$
La interpretación geométrica que podemos hacer de este caso es que los tres planos se cortan en un único punto. Por tanto, su posición relativa es que forman un TRIEDRO.


Planos secantes en un punto</td></tr>
</table>

Hallemos su punto de corte para m=2 y así damos por resuelto el apartado b) del problema. Para ello podemos usar Cramer o Gauss. En esta ocasión, utilizaremos Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F3'=F3-2F1]{F2'=F2-F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & -10 \end{array}\right)$$

Así pues:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & -10 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x + y + 3z = 5 \\ -y - z = -3 \\ -6z = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4/3 \\ y = 4/3 \\ z = 5/3 \end{cases}$$

CASO II: $m = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

En este caso, el sistema es **COMPATIBLE INDETERMINADO**, ya que se observa fácilmente que las filas 2 y 3 son proporcionales (linealmente dependientes). Así pues:

$$R(A) = R(A^*) = 2 \neq nº incógnitas$$

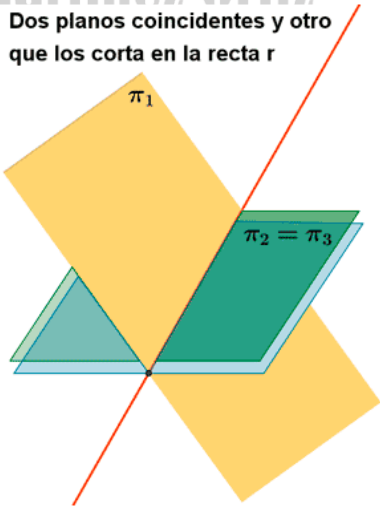
Así pues, los tres planos se cortan en una recta. Además, si comparamos la posición relativa de los planos dos a dos, observamos que:

$$\pi_1: \ x + y + 3z = 5 \ \text{ y } \ \pi_2: \ x = 0 \text{ son secantes}$$

$$\pi_1: \ x + y + 3z = 5 \ \text{ y } \ \pi_3: \ 2x = 0 \text{ son secantes}$$

$$\pi_2: \ x = 0 \ \text{ y } \ \pi_3: \ 2x = 0 \ \text{ son coincidentes}$$

Así pues, la posición relativa de los planos es: dos planos coincidentes que son cortados por un tercer plano:



Hallaremos la ecuación paramétrica de la recta en la que se cortan y así ya respondemos también al apartado c) del problema propuesto. Simplemente debemos de resolver el sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F3' = F3 - 2F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x + y + 3z = 5 \\ x = 0 \end{cases} \xRightarrow{z=\lambda} \begin{cases} x = 0 \\ y = 5 - 3\lambda \ \ con \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

CASO III: $m = 5$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

En este caso, el sistema es **INCOMPATIBLE**, ya los rangos de la matriz ampliada y de coeficientes no coinciden. Se aprecia fácilmente tras aplicar el método de reducción de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F3'=F3-2F1]{F2'=F2-F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & -10 \end{array}\right)$$

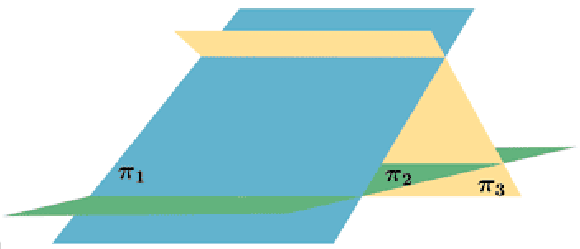
$$\xrightarrow{F3'=F3+3F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{array}\right)$$

Por tanto, se observa que:

$$R(A) = 2 \neq R(A^*) = 3$$

Así pues, la interpretación geométrica en este caso es que los planos no tienen ningún punto en común. Analizando la posición relativa de los planos de dos en dos, observamos que son secantes dos a dos y en consecuencia, su posición relativa es PRISMA (o tienda de campaña):

Planos que forman un prisma



Planos secantes o que se cortan dos a dos

b) Ya hemos visto que el punto de intersección es:

$$P = \left(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

c) Hemos visto que las ecuaciones paramétricas de la recta en la que se intersectan es:

$$r: \begin{cases} x = 0 \\ y = 5 - 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad con\ \lambda \in \mathbb{R}$$

PROBLEMA 2: Considera las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 1 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Determina los **valores del parámetro** real m para que la matriz A sea regular.

b) Calcula el **valor de los determinantes**: $|B \cdot C|$, $|B^2 \cdot C^{-1}|$ y $|2 \cdot B^T|$

c) Para $m = 2$, **calcula la matriz** cuadrada X de orden 3 que cumple $XA + C = 3B$

a) La matriz A será regular siempre que su determinante no sea cero. Así pues:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & m \\ 1 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - m^2 = (1+m) \cdot (1-m)$$

Igualando a cero el determinante de A:

$$|A| = 0 \rightarrow (1+m) \cdot (1-m) = 0 \rightarrow m = \pm 1$$

Por tanto, la matriz A es regular para todos los valores $m \neq \pm 1$

b) Calculemos primero los determinantes de las matrices B y C (lo cual es rápido porque ambas son triangulares):

$$|B| = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \qquad |C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 9$$

Así pues, haciendo uso de las propiedades de los determinantes:

$$|B \cdot C| = |B| \cdot |C| = -3 \cdot 9 = -27$$

$$|B^2 \cdot C^{-1}| = |B|^2 \cdot \frac{1}{|C|} = \frac{9}{9} = 1$$

$$|2 \cdot B^T| = 2^3 \cdot |B| = 8 \cdot (-3) = -24$$

c) Dado que para m=2 la matriz A es invertible, podemos resolver la ecuación matricial haciendo uso de la matriz inversa:

$$XA + C = 3B \;\rightarrow\; XA = 3B - C \;\rightarrow\; XA \cdot A^{-1} = (3B - C) \cdot A^{-1} \rightarrow$$
$$\rightarrow\; X = (3B - C) \cdot A^{-1}$$

Ahora, calcularemos la inversa de A mediante el método de adjuntos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj^T(A)$$

Dado que ya sabemos el valor de su determinante ($|A| = -3$), calcularemos ya la matriz de adjuntos:

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{13} = +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$
$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$
$$A_{31} = +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Por tanto, **la inversa de la matriz A será**:

$$A^{-1} = \frac{1}{-3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Así pues:

$$3B - C = 3 \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -1 & -5 \\ -6 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = (3B - C) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -10 & -1 & -5 \\ -6 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 & -13 \\ 4 & 0 & -11 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 3: Considera las rectas r y s dadas por las ecuaciones:

$$r:\ x-2=\frac{y-1}{k}=\frac{-1-z}{2} \qquad s:\ \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=2\lambda \end{cases} \quad con\ \lambda\in\mathbb{R}$$

Halla el valor del parámetro real k para que r y s sean **coplanarias**. Tras ello, para este valor de k obtenido, se pide:

a) Calcular el **ángulo** que forma las rectas r y s.

b) La **ecuación implícita** del plano que contienen a las rectas r y s.

c) La **ecuación paramétrica** de la recta perpendicular a r y s que pasa por el punto de corte de ambas rectas.

Primeramente, calcularemos el valor del parámetro k para que sean coplanarias. Recordemos que el único caso en el que dos rectas no son coplanarias es cuando las rectas se cruzan. Vamos a extraer primeramente un vector director y un punto de cada una de las rectas:

$$r:\ x-2=\frac{y-1}{k}=\frac{-1-z}{2} \ \rightarrow\ r:\ x-2=\frac{y-1}{k}=\frac{z+1}{-2} \ \rightarrow\ \begin{cases} P_r=(2,1,-1) \\ \overrightarrow{u_r}=(1,k,-2) \end{cases}$$

$$s:\ \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=2\lambda \end{cases} \ \rightarrow\ \begin{cases} P_s=(1,2,0) \\ \overrightarrow{u_s}=(1,-1,2) \end{cases}$$

A la vista de los vectores directores, podemos concluir que las rectas nunca serán paralelas o coincidentes ya que los vectores nunca pueden ser proporcionales. En consecuencia, veamos para qué valores las rectas se cruzan:

$$\det\left(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{P_rP_s}\right)=\begin{vmatrix} 1 & k & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-1-2k-2-(-2+2+k)=-3k-3$$

$$-3k-3=0 \ \rightarrow\ k=-1$$

Así pues, las rectas r y s son coplanarias (secantes en este caso) cuando $k=-1$

a) El ángulo formado por ambas rectas vendrá dado por:

$$cos\alpha=\frac{|\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_s}|}{||\overrightarrow{u_r}||\cdot||\overrightarrow{u_s}||}$$

$$cos\alpha = \frac{|(1,-1,-2)\cdot(1,-1,2)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}} = \frac{|1+1-4|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{1}{3} \ \rightarrow \ \alpha = 78{,}4º$$

b) Dado que para las rectas r y s son secantes, podemos calcular el plano que las contiene utilizando los vectores directores de ambas rectas y un punto de cualquiera de ellas:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \ \rightarrow \ -4x-4y+12=0 \ \rightarrow x+y-3=0$$

c) El vector director de la recta perpendicular que nos piden coincidirá con el vector normal del plano que hemos obtenido en el apartado anterior:

$$\vec{v} = (1,1,0)$$

Este vector también se puede obtener mediante el producto vectorial de los vectores directores de ambas rectas.

Ya solo quedaría calcular un punto de la recta que nos piden. Este punto es el punto de corte entre ambas rectas. Así pues, calculemos el punto de intersección de r y s resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones paramétricas:

$$r: \begin{cases} x = 2+\mu \\ y = 1-\mu \\ z = -1-2\mu \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 2-\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

Igualando incógnitas:

$$\begin{cases} 2+\mu = 1+\lambda \\ 1-\mu = 2-\lambda \\ -1-2\mu = 2\lambda \end{cases} \ \rightarrow \ \lambda = \frac{1}{4} \quad \mu = -\frac{3}{4}$$

Por tanto, el punto de intersección será:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda = 1 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{4} \\ y = 2 - \lambda = 2 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{4} \\ \quad z = 2\lambda = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \; M\left(\frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

Finalmente, la ecuación paramétrica de la recta que nos piden es:

$$t: \begin{cases} x = \dfrac{5}{4} + \alpha \\ y = \dfrac{7}{4} + \alpha \\ z = \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad con\ \alpha \in \mathbb{R}$$

PROBLEMA 4: Considera los planos:

$$\pi_1: \; x + 2y + z - 1 = 0 \qquad\qquad \pi_2: \; 3x - y - z = 0$$

a) Determina la **posición relativa** y el **ángulo** que forman ambos planos

b) ¿**Pertenece** el punto $A(1, -1, 2)$ a alguno de los dos planos?

c) Determina la **ecuación continua** de la recta paralela a ambos planos que pasa por el punto $B(2, 1, 2)$

d) Calcula la **distancia** del punto B al plano π_1

a) Para conocer la posición relativa de los planos, podemos comparar simplemente la razón existente entre los coeficientes de sus ecuaciones implícitas:

$$\frac{1}{3} \neq \frac{2}{-1} \neq \frac{1}{-1}$$

Así pues, en este caso, los planos son secantes. Calculemos ahora el ángulo que forman:

$$cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{||\overrightarrow{n_1}|| \cdot ||\overrightarrow{n_2}||}$$

$$cos\alpha = \frac{|(1,2,1)\cdot(3,-1,-1)|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+(-1)^2+(-1)^2}} = \frac{|3-2-1|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{11}} = 0 \ \rightarrow \ \alpha = 90º$$

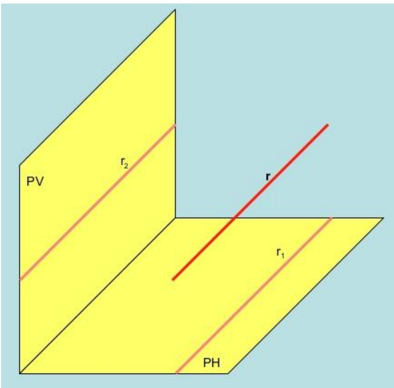
b) Para saberlo, simplemente hemos de sustituir las coordenadas del punto A en cada una de las ecuaciones y ver si se cumple alguna de ellas:

$$\pi_1: \ x+2y+z-1=0 \ \xRightarrow{A(1,-1,2)} \ 1+2\cdot(-1)+2-1=0 \ \Rightarrow \ A\in\pi_1$$

$$\pi_2: \ 3x-y-z= \ \xRightarrow{A(1,-1,2)} \ 3\cdot 1-(-1)-2=2\neq 0 \ \Rightarrow \ A\notin\pi_2$$

Por tanto, el punto A solo pertenece al plano π_1

c) Para obtener la recta paralela a ambos planos que pasa por $B(2,1,2)$, necesitaremos el vector que la dirige. Este vector, es paralelo a la recta que se genera al intersectarse ambos planos. Es decir, el vector director viene dado por el producto vectorial de los vectores normales de ambos planos:



$$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1,4,-7)$$

Así pues, la ecuación continua de la recta buscada es:

$$r: \ \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{-7}$$

d) Calculemos finalmente la distancia de B al primer plano. Utilizaremos la fórmula de la distancia de un punto (x_0, y_0, z_0) a un plano $Ax+By+Cz+D=0$ dada por:

$$d(B,\pi_1) = \frac{|\,Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Así pues:

$$d(B,\pi_1) = \frac{|\,2+2\cdot 1+2-1|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}} = \frac{5}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{6}\ u$$

PROBLEMA 5: Considera el plano π y la recta r dependientes del parámetro real m:

$$\pi: \ 4x + my - 4z - 1 = 0$$

$$r: \ (x, y, z) = (0, 5, 2) + \lambda \cdot (-1, m, 3) \quad con \ \lambda \in \mathbb{R}$$

a) Determina la **posición del plano y la recta** en función de m

b) Para $m = 1$, determina la **distancia** del punto $P(1, 0, 0)$ a la recta r

c) Para $m = 1$, calcula el **ángulo** que forman la recta r y el plano π

d) Para $m = 1$, calcula el punto de **intersección** entre la recta r y el plano π

e) Para $m = 4$, calcula la **distancia** entre la recta r y el plano π

a) Para determinar la posición relativa de recta y plano necesitamos extraer un punto y vector director de la recta y el vector normal del plano:

$$\pi: \ 4x + my - 4z - 1 = 0 \ \rightarrow \ \vec{n} = (4, m, -4)$$

$$r: \ (x, y, z) = (0, 5, 2) + \lambda \cdot (-1, m, 3) \ \rightarrow \ \vec{u} = (-1, m, 3) \ \ A(0, 5, 2)$$

Así pues, dado que:

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = (4, m, -4) \cdot (-1, m, 3) = -4 + m^2 - 12 = m^2 - 16$$
$$m^2 - 16 = 0 \ \rightarrow \ m = \pm 4$$

Distinguimos varios casos:

CASO I: $m \neq \pm 4 \ \rightarrow$ Entonces la recta y el plano son secantes, ya que los vectores director y normal no son perpendiculares.

CASO II: $m = 4 \ \rightarrow$ En este caso, la recta puede ser paralela al plano o puede estar contenida en el plano. Para diferenciar, veremos si un punto de la recta está también en el plano:

$$\pi: \ 4x + 4y - 4z - 1 = 0 \ \xRightarrow{A(0,5,2)} \ 4 \cdot 0 + 4 \cdot 5 - 4 \cdot 2 - 1 = 11 \neq 0$$

Así pues, la recta es paralela al plano.

CASO III: $m=-4\ \rightarrow$ En este caso, la recta puede ser paralela al plano o puede estar contenida en el plano. Para diferenciar, veremos si un punto de la recta está también en el plano:

$$\pi:\ 4x-4y-4z-1=0\ \xRightarrow{A(0,5,2)}\ 4\cdot 0-4\cdot 5-4\cdot 2-1=-29\neq 0$$

Así pues, la recta es paralela al plano.

b) Sabemos que la distancia de un punto P a una recta viene dada por:

$$d(P,r)=\frac{\|\overrightarrow{PA}\times\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

Así pues:

$$\overrightarrow{PA}\times\vec{u}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ -1 & 5 & 2\\ -1 & 1 & 3\end{vmatrix}=(13,1,4)$$

Por tanto:

$$d(P,r)=\frac{\|\overrightarrow{PA}\times\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}=\frac{\sqrt{13^2+1^2+4^2}}{\sqrt{(-1)^2+1^2+3^2}}=\frac{\sqrt{186}}{\sqrt{11}}\ u$$

c) El ángulo que forman el plano y la recta será:

$$sen\ \alpha=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{u}|}{\|\vec{n}\|\cdot\|\vec{u}\|}$$

$$sen\ \alpha=\frac{|(4,1,-4)\cdot(-1,1,3)|}{\sqrt{4^2+1^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+1^2+3^2}}=\frac{15}{11\sqrt{3}}\ \rightarrow\ \alpha=51{,}9º$$

d) Para calcular la intersección, sustituimos la ecuación paramétrica de la recta r en el plano:

$$r:\ \begin{cases}x=-\lambda\\ y=5+\lambda\\ z=2+3\lambda\end{cases}\qquad \pi:\ 4x+y-4z-1=0$$

Es decir:

$$4(-\lambda)+5+\lambda-4(2+3\lambda)-1=0\ \rightarrow\ \lambda=-\frac{4}{15}$$

Por tanto, el punto de intersección será:

$$\begin{cases}x=\dfrac{4}{15}\\ y=\dfrac{71}{15}\\ z=\dfrac{6}{5}\end{cases}\rightarrow\ M\left(\frac{4}{15},\frac{71}{15},\frac{6}{5}\right)$$

e) Dado que para m=4, la recta y el plano son paralelos, para obtener la distancia entre ambos, simplemente deberemos calcular la distancia entre un punto cualquiera de la recta y el plano:

$$d(r,\pi)=d(A,\pi)=\frac{|4\cdot 0+4\cdot 5-4\cdot 2-1|}{\sqrt{4^2+4^2+(-4)^2}}=\frac{11}{\sqrt{48}}\ u$$