DOSSIER SEMANAL 15

MATEMÁTICAS II

Por Pedro A. Martínez

PROBLEMA 1: Calcula el valor de los parámetros reales a, b y c **para que la función f(x) sea derivable** y además tenga derivada segunda en $x=1$:

$$f(x)=\begin{cases} sen\,(x-1) & x\leq 1 \\ \left(ax^2+bx+c\right)\cdot e^{1-x} & x>1 \end{cases}$$

Como puede observarse fácilmente el dominio de la función $f(x)$ es todo el conjunto de los números reales ya que las funciones que la componen son polinómicas, circulares y exponenciales sin problemas de dominio.

Dado que queremos que la función $f(x)$ sea derivable, es condición necesaria que sea también continua. Así pues, comencemos analizando la continuidad:

- Para $x<1$: La función en este tramo es continua en todo R por ser una función sinusoidal. En particular será continua en $x<1$.
- Para $x>1$: La función es continua en todo R por ser composición de funciones continuas (polinomio y exponencial). En particular será continua en $x>1$.

Por tanto, los únicos puntos que requieren especial atención con respecto a la continuidad son los puntos de cambio, transición o soldadura:

- Para $x=1$

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=sen(0)=0 \\ \lim\limits_{x\to 1-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-} sen\,(x-1)=0 \\ \lim\limits_{x\to 1+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+} \left(ax^2+bx+c\right)\cdot e^{1-x}=a+b+c \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a+b+c=0$$

Estudiemos ahora la derivabilidad en general:

- Para $x<1$: La función en este tramo es derivable en todo R por ser una función sinusoidal. En particular será derivable en $x<1$.
- Para $x>1$: La función es derivable en todo R por ser composición de funciones derivables (polinomio y exponencial). En particular será derivable en $x>1$.

Analicemos la derivabilidad en el punto de cambio:

$$f(x) = \begin{cases} sen\,(x-1) & x \le 1 \\ (ax^2 + bx + c)\cdot e^{1-x} & x > 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f\,'(x) = \begin{cases} cos\,(x-1) & x < 1 \\ (2ax+b)\cdot e^{1-x} - (ax^2 + bx + c)\cdot e^{1-x} & x > 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f\,'(x) = \begin{cases} cos\,(x-1) & x < 1 \\ [-ax^2 + (2a-b)x + (b-c)]\cdot e^{1-x} & x > 1 \end{cases}$$

Estudiemos las derivadas laterales en $x = 1$:

$$f\,'(1^+) = \underset{x\to 1+}{Lim}\,[-ax^2 + (2a-b)x + (b-c)]\cdot e^{1-x} = -a + 2a - b + b - c = a - c$$

$$f\,'(1^-) = \underset{x\to 1-}{Lim}\,cos\,(x-1) = cos\,(0) = 1$$

Por tanto, para que la función sea derivable deberá ocurrir que:

$$a + b + c = 0$$
$$a - c = 1$$

Por otro lado, nos dicen que también queremos que exista la segunda derivada en $x = 1$
Así pues:

$$f\,'(x) = \begin{cases} cos\,(x-1) & x < 1 \\ [-ax^2 + (2a-b)x + (b-c)]\cdot e^{1-x} & x > 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f\,''(x) = \begin{cases} -sen\,(x-1) & x < 1 \\ [ax^2 + (b-4a)x + (2a-2b+c)]\cdot e^{1-x} & x > 1 \end{cases}$$

Analizando las derivadas laterales en $x = 1$, vemos que:

$$f\,''(1^+) = \underset{x\to 1+}{Lim}\,[ax^2 + (b-4a)x + (2a-2b+c)]\cdot e^{1-x} = a + b - 4a + 2a - 2b + c = -a - b + c$$

$$f\,''(1^-) = \underset{x\to 1-}{Lim} - sen\,(x-1) = -sen\,(0) = 0$$

Por tanto, para que la función $f(x)$ cumpla con las condiciones demandadas deberá verificar las tres ecuaciones obtenidas:

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ a-c=1 \\ -a-b+c=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a=c+1 \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} b+2c=-1 \\ -b=1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad b=-1 \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} a=1 \\ c=0 \end{array}\right\}$$

Por tanto, los valores de a, b y c para que la función cumpla las condiciones del enunciado deberán ser: $a=1, \quad b=-1 \;\; y \quad c=0$

PROBLEMA 2: **Enuncia el Teorema de Bolzano**. A continuación, determina si existe algún punto en el intervalo $[-2,1]$ donde la función $f(x)$ corte al eje de abscisas.

$$f(x)=\begin{cases} e^x\cdot(x+1)^{-1} & -3\le x\le 0 \\ \left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{tg\,x} & 0<x<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

Recordemos que **el Teorema de Bolzano** dice:

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y verifica además que $f(a)\cdot f(b)<0$ (es decir, la función toma valores de signo opuesto en los extremos) entonces existe al menos un punto que llamaremos c del intervalo abierto (a,b)donde la función $f(x)$ se anula. Expresando la tesis matemáticamente:

$$\exists c\in(a,b)\,|\; f(c)=0$$

Así pues, analicemos a continuación si se cumplen las hipótesis del teorema de Bolzano para la función $f(x)$ propuesta. En primer lugar, es fácil observar que el dominio de la función es $D[f(x)]=R-\{-1\}$ ya que para este valor, se anula el denominador del primer tramo de la función. Así pues a la hora de analizar la continuidad de $f(x)$, deberemos tener en consideración dicho punto.

Comencemos con la continuidad:

- Para $-3<x<0$: La función en este tramo es continua en $R-\{-1\}$.
- Para $0<x<\dfrac{\pi}{2}$: La función es continua en todo el intervalo, ya que $x=0$ y $x=\dfrac{\pi}{2}$ no se incluyen en el intervalo.

Deberíamos estudiar ahora la continuidad en el punto de cambio y el punto donde presenta problemas de definición:

- Para $x=0$

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=\dfrac{e^0}{0+1}=1 \\ \lim\limits_{x\to 0-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{e^x}{x+1}=1 \\ \lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{tg\,x}=IND \end{array}\right\}$$

Resolvamos la indeterminación:

$$A=\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{tg\,x}=\left[IND\quad \infty^0\right]$$

Aplicamos logaritmos neperianos en ambos miembros de la expresión:

$$Ln\ A=\lim_{x\to 0+}\ tg\ x\cdot Ln\left(\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0+}\ tg\ x\cdot\left[Ln\,(1)-Ln\left(x^2\right)\right]=\lim_{x\to 0+}\ tg\ x\cdot\left[-2Ln\,(x)\right]=\left[IND\ 0\cdot\infty\right]$$

Así pues, para solventar esta nueva indeterminación recurriremos al uso de L'Hôpital tras transformar dicho producto en un cociente:

$$Ln\ A=\lim_{x\to 0+}\ tg\ x\cdot Ln\left(\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0+}\ tg\ x\cdot\left[Ln\,(1)-Ln\left(x^2\right)\right]=\lim_{x\to 0+}\ tg\ x\cdot\left[-2Ln\,(x)\right]=\left[IND\ 0\cdot\infty\right]$$

$$Ln\ A=\lim_{x\to 0+}\ \frac{-2\cdot Ln\,(x)}{\dfrac{1}{tg\ x}}=\lim_{x\to 0+}\ \frac{-\dfrac{2}{x}}{\dfrac{1}{tg^2\ x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to 0+}\ \frac{-\dfrac{2}{x}}{\dfrac{1}{sen^2\ x}}=\lim_{x\to 0+}\ -\frac{2\ sen^2\ x}{x}$$

$$Ln\ A=\lim_{x\to 0+}\ -\frac{2\ sen^2\ x}{x}=\lim_{x\to 0+}\ -\frac{4\ sen\ x\cdot\cos x}{1}=0\ \Rightarrow\ Ln\ A=0\ \Rightarrow\ A=e^0\ \Rightarrow\ A=1$$

En conclusión, la función es continua en $x=0$ ya que:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=\dfrac{e^0}{0+1}=1 \\ \lim\limits_{x\to 0-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{e^x}{x+1}=1 \\ \lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{tg\,x}=1 \end{array}\right\}$$

Veamos qué ocurre para $x=-1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=No\ existe \\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{e^x}{x+1}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{e^x}{x+1}=+\infty \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)\ no\ es\ continua\ en\ x=-1$$

En consecuencia, vemos que **no se cumplen las hipótesis del teorema de Bolzano** en el intervalo $[-2,1]$ ya que no es continua en $x=-1$. Por tanto, **no podremos concluir nada mediante este teorema**. La única opción que tenemos ahora es igualar la función a cero y ver si podemos resolver las ecuaciones resultantes:

$$f(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} e^x\cdot(x+1)^{-1}=0 \Rightarrow e^x=0 \Rightarrow No\ tiene\ solución \\ \left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{tg\,x}=0 \Rightarrow \dfrac{1}{x^2}=0 \Rightarrow 1=0 \Rightarrow No\ tiene\ solución \end{cases}$$

Como conclusión final, podemos decir que la función no tiene ningún punto donde corte al eje de abscisas, es decir:

$$\nexists c\in R \mid f(c)=0$$

PROBLEMA 3: **Enuncia el Teorema de Rolle**. Ahora, **demuestra** que la ecuación $x^3 - 4x + 2 = 0$ no puede tener dos raíces reales distintas en el intervalo abierto $]2, 3[$.

Enunciaremos primeramente el Teorema de Rolle para dejar constancia de sus premisas y su tesis o conclusión:

Sea una función $f(x)$ definida en $[a, b]$ que verifica las siguientes tres condiciones:

- $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$
- $f(x)$ es una función derivable en el intervalo abierto $]a, b[$
- $f(a) = f(b)$

Entonces existe un punto c interior del intervalo (a, b) donde la derivada de la función se anula, expresándolo matemáticamente:

$$\exists c \in (a, b) \mid f'(c) = 0$$

No sabemos si la ecuación tiene o no alguna solución en el intervalo considerado, no obstante, dado que lo que se nos pide es que comprobemos que no pueden existir dos soluciones, supondremos que existen dos soluciones distintas en el intervalo $]2, 3[$ de la ecuación propuesta y veremos que esto no es posible. La función $f(x)$ es polinómica y en consecuencia su dominio es todo el conjunto de los números reales. Si estudiamos la monotonía de la función, observamos que:

$$f(x) = x^3 - 4x + 2 \;\Rightarrow\; f'(x) = 3x^2 - 4 \;\Rightarrow\; 3x^2 - 4 = 0 \;\Rightarrow\; x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$$

Es decir, la función $f(x)$ posee dos puntos críticos. Ello nos lleva a:

	$-\infty$ + $-\sqrt{4/3}$	$-\sqrt{4/3}$ - $\sqrt{4/3}$	$\sqrt{4/3}$ + $+\infty$
Signo de f'(x)	+	-	+
Monotonia de f(x)	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Es decir, **la función $f(x)$ siempre es creciente en el intervalo** $\left]-\infty,-\sqrt{4/3}\right[\cup\left]-\sqrt{4/3},+\infty\right[$. Ello implica que en el intervalo $\left]2,3\right[$ (que es el que nos interesa) también será creciente. Así pues, llegamos a una contradicción pues la función no puede cortar más de una vez al eje OX porque una vez lo ha cortado, como continúa creciendo no hay posibilidad de que pueda volver a pasar por él.

Por todo ello, podemos asegurar que la ecuación $x^3-4x+2=0$ no puede tener <u>más de dos soluciones</u> en el intervalo $\left]2,3\right[$.

PROBLEMA 4: Calcula el punto de la función $f(x)=x^2+ax+5$ (con $a\in R$) donde la recta tangente es paralela a la recta $y=3x-2$ sabiendo que $(-1,5)$ es un punto de la gráfica de $f(x)$.

Dado que $(-1,5)$ es un punto de la gráfica de $f(x)$, sabemos que $f(-1)=5$:

$$f(-1)=(-1)^2-a+5=6-a=5 \quad\Rightarrow\quad a=1$$

Por tanto, $f(x)=x^2+x+5$. Calculemos ahora el punto de la función cuya recta tangente es paralela a la recta que nos dan. Este punto podemos obtenerlo igualando las derivadas de ambas funciones:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2+x+5 \quad\Rightarrow\quad f'(x)=2x+1 \\ y=3x-2 \quad\Rightarrow\quad y'=3 \end{array}\right\} \Rightarrow\quad 2x+1=3 \quad\Rightarrow\quad x=1$$

Por tanto, el punto P de $f(x)$ para el cual su recta tangente es paralela a $y=3x-2$ será:

$$f(1)=1+1+5=7 \quad\Rightarrow\quad P(1,7)$$

PROBLEMA 5: Determina las coordenadas del **punto simétrico** de A(1, 2, -2) respecto del plano de ecuación $\pi \equiv x + 2y - z - 3 = 0$ ¿Cuál es la **distancia** que hay del punto A al plano?

Resolveremos el problema mediante un proceso constructivo. Llamaremos B al punto simétrico de A respecto al plano dado.

Paso 1: Determinamos primeramente la ecuación paramétrica de la recta perpendicular al plano π que pasa por A:

$$\begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 2 + 2\mu \\ z = -2 - \mu \end{cases} \quad con\ \mu \in R$$

Paso 2: Calculamos el punto M de intersección de dicha recta con el plano π

$$1 + \mu + 2 \cdot (2 + 2\mu) - (-2 - \mu) - 3 = 0$$

$$6\mu + 4 = 0$$

$$\mu = -\frac{2}{3}$$

Sustituimos el valor del parámetro en la recta para obtener el punto M:

$$\begin{cases} x = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ y = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \\ z = -2 + \frac{2}{3} = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Paso 3: El punto M resulta ser el punto medio entre A y su simétrico B. Así pues:

$$\frac{A + B}{2} = M \ \rightarrow \ B = 2M - A = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

La distancia que se pide podemos calcularla ahora de dos formas. O bien utilizando la fórmula de la distancia de un punto a un plano o bien calculando el módulo del vector $\overrightarrow{AM}$. En cualquier caso:

$$d(A, \pi) = \frac{|1 + 2 \cdot 2 + 2 - 3|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}\ u$$