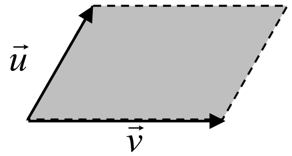
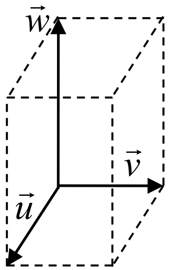
*A continuación se presenta un resumen de los contenidos referentes al bloque de geometría analítica en el espacio. Este documento deberá entenderse como una **herramienta de apoyo**. En ningún momento se considerará como base teórica.*

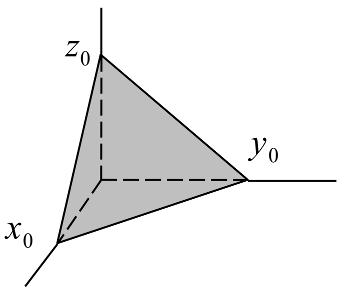
VECTORES

Operación	Cómo calcular	Algunas propiedades	Interpretación geométrica
Producto escalar	$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$ $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos\alpha$	• Es un **número** • $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$	• Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores no nulos: $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$ (son **perpendiculares**)
Norma o módulo	$\|\vec{u}\|=\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}$	• Es un **valor no negativo** • $\|\vec{u}\|^2=\vec{u}\cdot\vec{u}$	• Representa la **longitud** del vector $\vec{u}$
Producto vectorial	$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}$	• Es un **vector perpendicular** a los vectores que se multiplican. • Su sentido viene dado por la *"regla del tornillo"* • Su módulo es: $\|\vec{u}\times\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot sen\,\alpha$ • $\vec{u}\times\vec{v}=-\vec{v}\times\vec{u}$	• Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores no nulos: $\vec{u}\times\vec{v}=0 \Rightarrow \vec{u}\parallel\vec{v}$ (son **paralelos**) • **Su modulo es el área** del paralelogramo generado por ambos vectores. 
Producto mixto	$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix}u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}$	• Es un **número** • Es un determinante, por lo que sus propiedades son las mismas que las de estos.	• Su valor absoluto representa el **volumen** del paralelepípedo generado por los tres vectores 

ECUACIONES DEL PLANO

Para determinar la ecuación de un plano deberemos disponer de uno de los siguientes grupos de elementos:

1)	***Tres puntos** del plano*	*2)*	***Dos vectores** directores del plano y **un punto** de éste*	*3)*	*Un **vector normal** al plano y **un punto** de éste*

<table>
<tr><th>ECUACIÓN</th><th>EXPRESIÓN ANALÍTICA</th><th>UN PUNTO</th><th>VECTORES DIRECTORES</th><th>VECTOR NORMAL</th></tr>
<tr><td>Vectorial</td><td>$(x,y,z)=(a,b,c)+\lambda\cdot(u_1,u_2,u_3)+\mu\cdot(v_1,v_2,v_3)$</td><td rowspan="2">$P=(a,b,c)$</td><td rowspan="2">$\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$
$\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$</td><td rowspan="2">$\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}$</td></tr>
<tr><td>Paramétrica</td><td>$\begin{cases} x=a+\lambda\cdot u_1+\mu\cdot v_1 \\ y=b+\lambda\cdot u_2+\mu\cdot v_2 \\ z=c+\lambda\cdot u_3+\mu\cdot v_3 \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>General o Implícita</td><td>$\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow Ax+By+Cz+D=0$</td><td>Dar valores a dos de las incógnitas y despejar la tercera</td><td rowspan="2">Extraer dos puntos y restarlos para obtener un vector director o pasar la ecuación a paramétricas</td><td>$\vec{n}=(A,B,C)$</td></tr>
<tr><td>Segmentaria</td><td>$\frac{x}{x_0}+\frac{y}{y_0}+\frac{z}{z_0}=1$
</td><td>$P=(x_0,0,0)$
$P=(0,y_0,0)$
$P=(0,0,z_0)$</td><td>$\vec{n}=(y_0z_0,x_0z_0,x_0z_0)$</td></tr>
</table>

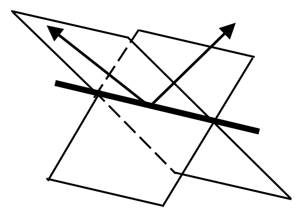
ECUACIONES DE LA RECTA

Para determinar la ecuación de una recta deberemos disponer de uno de los siguientes grupos de elementos:

1)	***Dos puntos** de la recta*	*2)*	*Un **vector director** de la recta y **un punto** de ésta*

ECUACIÓN	EXPRESIÓN ANALÍTICA	UN PUNTO	VECTOR DIRECTOR	VECTOR NORMAL
Vectorial	$(x,y,z)=(a,b,c)+\lambda\cdot(u_1,u_2,u_3)$	$P=(a,b,c)$	$\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$	*Una recta tiene infinitos vectores normales. Si deseamos obtener uno, basta con calcular uno que cumpla que* $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$ *Si, por ejemplo hacemos* $u_3\neq 0$ $\vec{n}=\left(0,1,-\frac{u_2}{u_3}\right)$
Paramétrica	$\begin{cases} x=a+\lambda\cdot u_1 \\ y=b+\lambda\cdot u_2 \\ z=c+\lambda\cdot u_3 \end{cases}$			
Continua	$\frac{x-a}{u_1}=\frac{y-b}{u_2}=\frac{z-c}{u_3}$			

Una recta puede también expresarse como intersección de dos planos secantes. Para obtener dos de estos planos, simplemente hemos de seleccionar un par de igualdades de la ecuación continua y expresarlas en forma general.

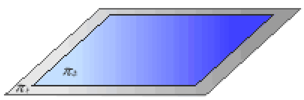
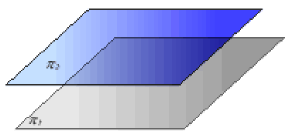
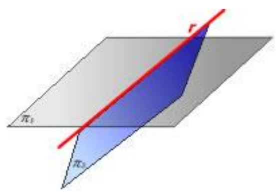
ECUACIÓN	EXPRESIÓN ANALÍTICA	UN PUNTO	VECTOR DIRECTOR
Como intersección de dos planos	$\left.\begin{array}{l} \frac{x-a}{u_1}=\frac{y-b}{u_2} \\ \frac{y-b}{u_2}=\frac{z-c}{u_3} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{array}\right\}$	*Dar valor a **una** de las incógnitas y despejar las otras dos restantes*	*Multiplicando vectorialmente los vectores normales de los planos:* $\vec{u}=(A,B,C)\times(A',B',C')$ 

POSICIONES RELATIVAS EN EL ESPACIO

Para determinar la posición relativa de dos o más cuerpos (rectas o planos) en el espacio, simplemente deberá discutirse el sistema formado por las ecuaciones de cada uno de los objetos y relacionarlos con la posición adecuada. No obstante, en algunas ocasiones existen técnicas más rápidas y sencillas que nos permiten averiguar la posición relativa de diversos cuerpos sin recurrir a la discusión del sistema.

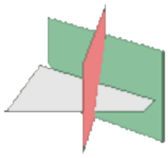
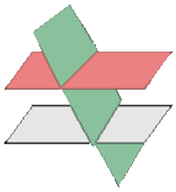
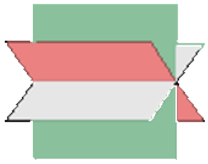
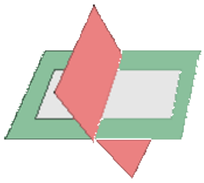
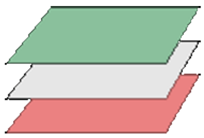
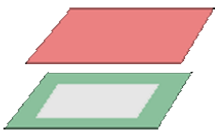
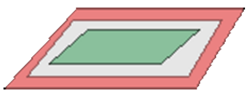
1. Posición relativa de dos planos

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \\ \pi_2 \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{array}\right\}$$

POSICIÓN	DISCUSIÓN DEL SISTEMA	OTRO MÉTODO	REPRESENTACIÓN
Coincidentes	$Rg(A) = Rg(A^*) = 1$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$	
Paralelos	$Rg(A) \neq Rg(A^*)$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$	
Secantes	$Rg(A) = Rg(A^*) = 2$	En otro caso	

2. **<u>Posición relativa de tres planos</u>:**

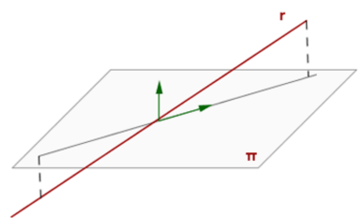
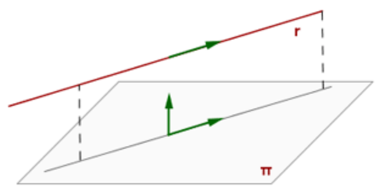
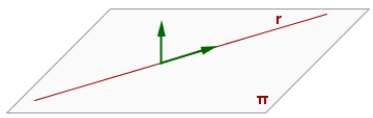
$$\left.\begin{array}{l}\pi_1 \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \\ \pi_2 \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0 \\ \pi_3 \equiv A''x + B''y + C''z + D'' = 0\end{array}\right\}$$

$Rg(A)$	$Rg(A^*)$	**POSICIÓN**	**REPRESENTACIÓN**
3	3	Los planos se cortan en un único punto (forman un triedro)	
2	3	Planos secantes dos a dos	 
2	2	Los planos se cortan en una recta	 
1	2	Planos paralelos o dos coincidentes y el restante paralelo	 
1	1	Planos coincidentes	

3. **<u>Posición relativa de recta-plano</u>**

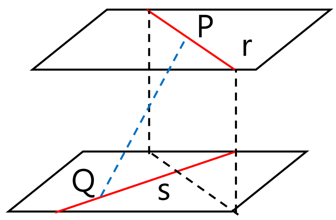
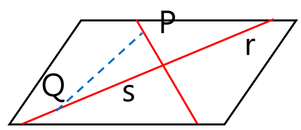
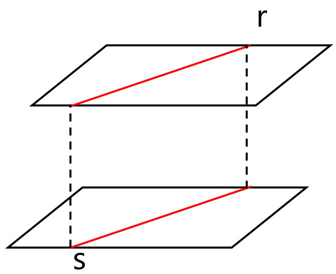
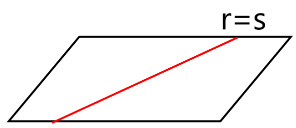
$$\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

$$r \equiv \begin{cases} A'x + B'y + C'z + D' = 0 \\ A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \end{cases}$$

POSICIÓN	**DISCUSIÓN DEL SISTEMA**	**OTRO MÉTODO** $\vec{n} \equiv normal\ del\ plano$ $\vec{u} \equiv director\ de\ la\ recta$	**REPRESENTACIÓN**
Secantes	$Rg(A) = Rg(A^*) = 3$	$\vec{n} \cdot \vec{u} \neq 0$	
Paralelos	$Rg(A) \neq Rg(A^*)$	$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ y un punto de r no está en el plano π	
Recta contenida en el plano	$Rg(A) = Rg(A^*) = 2$	$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ y un punto de r está en el plano π	

4. **<u>Posición relativa de dos rectas</u>**:

$$r_1 \equiv \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases} \qquad r_2 \equiv \begin{cases} A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \\ A'''x + B'''y + C'''z + D''' = 0 \end{cases}$$

<table>
<tr><th>POSICIÓN</th><th>DISCUSIÓN DEL SISTEMA</th><th colspan="2">OTRO MÉTODO
$\vec{u} \equiv director\ de\ la\ recta\ r_1$
$\vec{v} \equiv director\ de\ la\ recta\ r_2$
$\vec{w} \equiv \overrightarrow{PQ}$</th><th>REPRESENTACIÓN</th></tr>
<tr><td>Se cruzan</td><td>$Rg(A^*) = 4$</td><td rowspan="2">$\vec{u}$ y $\vec{v}$ <u>no</u> son proporcionales</td><td>$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$</td><td></td></tr>
<tr><td>Secantes</td><td>$Rg(A) = Rg(A^*) = 3$</td><td>$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$</td><td></td></tr>
<tr><td>Paralelas</td><td>$Rg(A) \neq Rg(A^*) < 4$</td><td rowspan="2">$\vec{u}$ y $\vec{v}$ son proporcionales</td><td>Un punto de la primera recta <u>no</u> estará en la otra</td><td></td></tr>
<tr><td>Coincidentes</td><td>$Rg(A) = Rg(A^*) = 2$</td><td>Un punto de la primera recta <u>siempre</u> estará en la otra</td><td></td></tr>
</table>

PROPIEDADES MÉTRICAS

1. <u>Distancias</u>:

Posición	Ecuaciones	Fórmula
Punto-punto	$P(a,b,c)$ $Q(a',b',c')$	$d(P,Q)=\left\|\vec{PQ}\right\|=\sqrt{(a'-a)^2+(b'-b)^2+(c'-c)^2}$
Punto-plano	$P(a,b,c)$ $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$	$d(P,\pi)=\dfrac{\left\|A\cdot a+B\cdot b+C\cdot c+D\right\|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$
Punto-recta	$P(a,b,c)$ $r\equiv \vec{x}=Q+\lambda\cdot\vec{u}$	$d(P,r)=\dfrac{\left\|\vec{PQ}\times\vec{u}\right\|}{\left\Vert\vec{u}\right\Vert}$
Dos rectas que se cruzan	$r\equiv \vec{x}=P+\lambda\cdot\vec{u}$ $s\equiv \vec{x}=Q+\mu\cdot\vec{v}$	$d(r,s)=\dfrac{\left\lfloor\vec{PQ},\vec{u},\vec{v}\right\rfloor}{\left\Vert\vec{u}\times\vec{v}\right\Vert}$

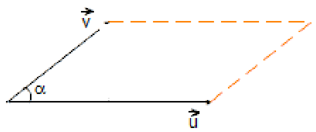
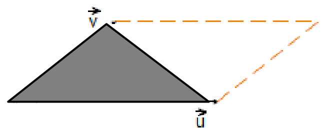
Es conveniente conocer también el cálculo de distancias mediante el **procedimiento constructivista**, para el cual no se requiere el uso de fórmulas aisladas.

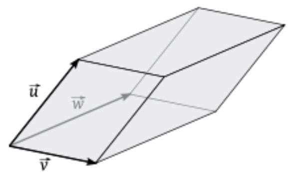
2. Ángulos

El cálculo del ángulo sólo tiene sentido si los cuerpos en el espacio se cortan o se cruzan. En estos casos, podemos determinar el ángulo que forman mediante las siguientes expresiones:

Posición	Ecuaciones	Fórmula
Dos rectas	$\vec{u} \equiv director\ de\ la\ recta\ r_1$ $\vec{v} \equiv director\ de\ la\ recta\ r_2$	$\cos\alpha = \frac{\lvert \vec{u}\cdot\vec{v} \rvert}{\lVert \vec{u} \rVert \cdot \lVert \vec{v} \rVert}$
Dos planos	$\vec{n} \equiv normal\ del\ plano\ \pi_1$ $\vec{m} \equiv normal\ del\ plano\ \pi_2$	$\cos\alpha = \frac{\lvert \vec{n}\cdot\vec{m} \rvert}{\lVert \vec{n} \rVert \cdot \lVert \vec{m} \rVert}$
Recta y plano	$\vec{u} \equiv director\ de\ la\ recta\ r$ $\vec{n} \equiv normal\ del\ plano\ \pi$	$sen\,\alpha = \frac{\lvert \vec{u}\cdot\vec{n} \rvert}{\lVert \vec{u} \rVert \cdot \lVert \vec{n} \rVert}$

3. Áreas y volúmenes

Área	Fórmula	Representación
Paralelogramo	$A = \left\Vert \vec{u} \times \vec{v} \right\Vert$	
Triángulo	$A = \dfrac{\left\Vert \vec{u} \times \vec{v} \right\Vert}{2}$	

Volumen	Fórmula	Representación
Paralelepípedo	$V = \left\vert \left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right] \right\vert$	
Tetraedro	$V = \dfrac{\left\vert \left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right] \right\vert}{6}$