DOSSIER SEMANAL 05

MATEMÁTICAS II

Por Pedro A. Martínez

PROBLEMA 1: Considera las siguientes matrices cuadradas de orden 3:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ -1 & -1 & -1\\ 2 & 4 & 3\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & -3 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}0 & 4 & 0\\ -1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

a) Demuestra que la matriz $T=B+C$ **es invertible**

b) **Calcula** la matriz T^{-1}

c) **Calcula**, si es posible, **la matriz** X que verifica la ecuación:

$$BX=A-CX$$

d) **Calcula el determinante** de la matriz D que verifica que:

$$A=T^{-1}\cdot D\cdot T$$

a) Para ello simplemente hemos de ver que el $|T|$ es distinto de cero. Así pues:

$$T=B+C=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & -3 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 4 & 0\\ -1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ -1 & -3 & -1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

Y el determinante de dicha matriz es:

$$|T|=|B+C|=\begin{vmatrix}2 & 4 & 1\\ -1 & -3 & -1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=-6-4-2+3+4+4=-12+11=-1\neq 0$$

En consecuencia, la matriz T es regular, es decir, es invertible.

b) Calculemos la matriz inversa utilizando, por ejemplo, el procedimiento por adjuntos.

Aplicaremos la fórmula: $T^{-1}=\dfrac{Adj^{T}(T)}{|T|}$

Calculamos primero la matriz de adjuntos:

$$Adj_{11}(T)=\begin{vmatrix}-3 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1 \qquad Adj_{12}(T)=-\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0 \qquad Adj_{13}(T)=\begin{vmatrix}-1 & -3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1$$

$$Adj_{21}(T)=-\begin{vmatrix}4 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-2 \qquad Adj_{22}(T)=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1 \qquad Adj_{23}(T)=-\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix}=0$$

$$Adj_{31}(T)=\begin{vmatrix}4 & 1\\ -3 & -1\end{vmatrix}=-1 \qquad Adj_{32}(T)=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{vmatrix}=1 \qquad Adj_{33}(T)=\begin{vmatrix}2 & 4\\ -1 & -3\end{vmatrix}=-2$$

Así pues:

$$Adj(T)=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 0\\ -1 & 1 & -2\end{pmatrix} \Rightarrow T^{-1}=\frac{Adj^{T}(T)}{|T|}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

c) Si intentamos despejar la matriz X de la ecuación propuesta, observamos que:

$$BX=A-CX \Rightarrow BX+CX=A \Rightarrow (B+C)\cdot X=A \Rightarrow T\cdot X=A$$

$$\Rightarrow T^{-1}\cdot T\cdot X=T^{-1}\cdot A \Rightarrow X=T^{-1}\cdot A$$

Así pues:

$$X=T^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ -1 & -1 & -1\\ 2 & 4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 2\\ -1 & -3 & -2\\ 2 & 6 & 5\end{pmatrix}$$

d) Aplicando las propiedades de los determinantes, observamos que:

$$|A|=|T^{-1}\cdot D\cdot T| \Rightarrow |A|=|T^{-1}|\cdot|D|\cdot|T| \Rightarrow |A|=\frac{1}{|T|}\cdot|D|\cdot|T| \Rightarrow |A|=|D|$$

Así pues:

$$|D|=|A|=\begin{vmatrix}2 & 2 & 1\\ -1 & -1 & -1\\ 2 & 4 & 3\end{vmatrix}=-6-4-4+2+8+6=-14+16=2$$

PROBLEMA 2: **Resuelve** la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 2\cdot(x^2-1) & x+1 & (x+1)^2 \\ x-1 & x+1 & x+1 \\ (x-1)^2 & x-1 & x^2-1 \end{vmatrix} = 0$$

La manera más rápida y sencilla de resolver este ejercicio consiste en aplicar las propiedades de los determinantes para calcular el determinante propuesto en este caso:

$$\begin{vmatrix} 2\cdot(x^2-1) & x+1 & (x+1)^2 \\ x-1 & x+1 & x+1 \\ (x-1)^2 & x-1 & x^2-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cdot(x-1)\cdot(x+1) & x+1 & (x+1)^2 \\ x-1 & x+1 & x+1 \\ (x-1)^2 & x-1 & (x-1)\cdot(x+1) \end{vmatrix} =$$

$$= (x-1)\cdot(x+1)\cdot\begin{vmatrix} 2\cdot(x+1) & x+1 & x+1 \\ 1 & x+1 & 1 \\ x-1 & x-1 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)^2\cdot(x+1)^2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & x+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\underset{\substack{C1'=C1-C3 \\ C2'=C2-C3}}{=} (x-1)^2\cdot(x+1)^2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x\cdot(x-1)^2\cdot(x+1)^2$$

Así pues, la solución a la ecuación propuesta será:

$$x\cdot(x-1)^2\cdot(x+1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

PROBLEMA 3: **Calcula** razonadamente **la función derivada** de las siguientes funciones:

1) $f(x)=(x^2+x)(x-3)^4$ 2) $f(x)=\dfrac{2}{(x^2-1)^3}$ 3) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$

4) $f(x)=\dfrac{(2x-1)^2}{3x+1}$ 5) $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x-1}{4x+1}}$ 6) $f(x)=\sqrt{1+\sqrt{x}}$

Para la resolución de esta actividad utilizaremos las reglas de derivación del producto y el cociente de dos funciones, cuyas expresiones vamos a recordar a continuación:

$$h(x)=f(x)\cdot g(x) \quad\Rightarrow\quad h'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

$$h(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \quad\Rightarrow\quad h'(x)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

También haremos uso en algún momento de la expresión directa para derivar una raíz cuadrada.

$$h(x)=\sqrt{f(x)} \quad\Rightarrow\quad h'(x)=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

Otras veces transformaremos la raíz cuadrada en potencia y derivaremos. Cualquiera de las dos opciones es correcta.

1) $f(x)=(x^2+x)(x-3)^4 \quad\Rightarrow\quad f'(x)=(2x+1)(x-3)^4+(x^2+x)\cdot 4(x-3)^3$

$\Rightarrow\quad f'(x)=(x-3)^3\cdot\left[(2x+1)(x-3)+4(x^2+x)\right]$

$\Rightarrow\quad f'(x)=(x-3)^3\cdot\left[2x^2-5x-3+4x^2+4x\right]$

$\Rightarrow\quad f'(x)=(x-3)^3\cdot(6x^2-x-3)$

2) $f(x)=\dfrac{2}{\left(x^2-1\right)^3}=2\left(x^2-1\right)^{-3} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=-6\left(x^2-1\right)^{-4}\cdot 2x=\dfrac{-12x}{\left(x^2-1\right)^4}$

3) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{1\cdot\left(x^2+1\right)-\left(x+1\right)\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{x^2+1-2x^2-2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{1-2x-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$

4) $f(x)=\dfrac{\left(2x-1\right)^2}{3x+1} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{2\left(2x-1\right)\cdot 2\cdot\left(3x+1\right)-\left(2x-1\right)^2\cdot 3}{\left(3x+1\right)^2}$

$\Rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{4\left(6x^2-x-1\right)-3\left(4x^2-4x+1\right)}{\left(3x+1\right)^2}=\dfrac{24x^2-4x-4-\left(12x^2-12x+3\right)}{\left(3x+1\right)^2}$

$\Rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{12x^2+8x-7}{\left(3x+1\right)^2}$

5) $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x-1}{4x+1}}=\left(\dfrac{2x-1}{4x+1}\right)^{1/2} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2x-1}{4x+1}\right)^{-1/2}\cdot\dfrac{2\cdot\left(4x+1\right)-4\cdot\left(2x-1\right)}{\left(4x+1\right)^2}$

$\Rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2x-1}{4x+1}\right)^{-1/2}\cdot\dfrac{6}{\left(4x+1\right)^2}=\left(\dfrac{4x+1}{2x-1}\right)^{1/2}\cdot\dfrac{3}{\left(4x+1\right)^2}$

$\Rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{3}{\sqrt{2x-1}}\dfrac{\left(4x+1\right)^{1/2}}{\left(4x+1\right)^2}=\dfrac{3}{\sqrt{2x-1}}\left(4x+1\right)^{-3/2}=\dfrac{3}{\sqrt{\left(2x-1\right)\left(4x+1\right)^3}}$

6) $f(x)=\sqrt{1+\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{1+\sqrt{x}}}\cdot\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x}}=\dfrac{1}{4\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}}}$