REPASO DE ANÁLISIS FUNCIONAL

Lea todo el prospecto detenidamente antes de empezar a realizar la hoja de repaso.
- *Conserve este prospecto. Puede tener que volver a leerlo.*
- *Si tiene alguna duda, consulte a su profesor o amigo/a que siempre saca buena nota.*
- *Esta hoja de repaso se le ha recetado a Vd. personalmente y no debe darla a otras personas. Puede perjudicarles, aun cuando sus síntomas sean los mismos que los suyos*

Composición por cada 100 mg:
- *15 mg de teoremas de **continuidad y derivabilidad***
- *12 mg de **límites de funciones***
- *5 mg de cálculo de **derivadas***
- *4 mg de **representación de funciones***
- *30 mg de **problemas de optimización***
- *17 mg de **rectas tangentes***
- *10 mg de **aplicaciones de derivadas***
- *5 mg de **cálculo de parámetros***
- *1mg de **ideas felices***

Titular y fabricante: *Dr. Pedro A. Martínez*

Antes de tomar "Repaso de Análisis Funcional". No realice este repaso si...:
- *Si no está cursando Matemáticas II de 2º Bachillerato en el IES Macià Abela.*
- *Si no ha dedicado tiempo a elaborar un esquema o resumen que le ayude a estudiar el contenido de la asignatura.*
- *Si usted no ha practicado antes lo suficiente con ejercicios similares realizados en clase.*
- *Si padece nerviosismo extremo cuando no le sale un problema.*
- *Si no ha dormido bien y se siente agotado y/o agobiado.*

Dosis recomendada:
- *3 problemas diarios durante 6 días.*

Efectos secundarios:
- *Debe saber que si realiza este repaso puede sufrir un aumento de su conocimiento y habilidades matemáticas*
- *También podría ganar herramientas y técnicas para enfrentarse a dificultades matemáticas.*

Toma de otros medicamentos:
- *Este producto no es incompatible con la realización de otros ejercicios similares. De hecho, el "Repaso de Análisis Funcional" es más efectivo acompañado de otros repasos y/o **actividades trabajadas en clase con similar composición**.*

Advertencias:
- *Esta hoja de repaso no es apta para niños*
- *Después de realizar estos ejercicios se aconseja no trabajar con maquinaria pesada, conducir o realizar cualquier actividad de riesgo.*
- *Si usted toma más "Repaso de Análisis Funcional" del que debiera contacte urgentemente con su profesor: **maths4everything@gmail.com***

1. **Enuncia el Teorema de Bolzano**. Tras ello, considera la ecuación $x^3+\lambda x^2=2x+1$ donde $\lambda>0$. Se pide demostrar que:
   a. Si $\lambda>2$, la ecuación admite alguna solución real menor que 1.
   b. Si $\lambda<2$, la ecuación admite alguna solución mayor que 1.

Recordemos que **el Teorema de Bolzano** dice:

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y verifica además que $f(a)\cdot f(b)<0$ (es decir, la función toma valores de signo opuesto en los extremos) entonces existe al menos un punto que llamaremos c del intervalo abierto (a,b)donde la función $f(x)$ se anula. Expresando la tesis matemáticamente:

$$\exists c\in(a,b)|\ f(c)=0$$

Consideremos la ecuación:

a) Comprobar que la ecuación $x^3+\lambda x^2=2x+1$ tiene alguna solución real menor que 1 es equivalente a comprobar que la ecuación $x^3+\lambda x^2-2x-1=0$ tiene alguna solución real menor que uno. Así pues definimos la función:

$$f(x)=x^3+\lambda x^2-2x-1$$

Comprobemos que dicha función verifica las hipótesis del teorema de Bolzano en el intervalo $[0,1]$:

- La función $f(x)=x^3+\lambda x^2-2x-1$ es continua en R por ser un polinomio, en concreto será continua en el intervalo cerrado $[0,1]$
- Además, verifica que:

$$f(0)=-1<0$$
$$f(1)=\lambda-2>0 \quad \textit{porque sabemos que } \lambda>2$$

Por tanto, concluimos que $\exists c \in (0,1) | \; f(c) = 0$. Es decir, la ecuación $x^3 + \lambda x^2 = 2x + 1$ posee al menos una solución real menor que uno.

b) Para este apartado se procede de la misma forma que en el apartado anterior pero utilizando el intervalo $[1,2]$. Así pues, simplemente comprobemos que $f(x) = x^3 + \lambda x^2 - 2x - 1$ verifica las hipótesis del teorema de Bolzano en $[1,2]$:

- La función $f(x) = x^3 + \lambda x^2 - 2x - 1$ es continua en R por ser un polinomio, en concreto será continua en el intervalo cerrado $[1,2]$
- Además, verifica que:

$$f(2) = 4\lambda + 3 > 0 \quad \textit{porque sabemos que } \lambda > 0$$
$$f(1) = \lambda - 2 < 0 \quad \textit{porque sabemos que } \lambda < 2$$

Por tanto, concluimos que $\exists c \in (1,2) | \; f(c) = 0$. Es decir, la ecuación $x^3 + \lambda x^2 = 2x + 1$ posee al menos una solución real mayor que uno.

2. **Enuncia el Teorema de Rolle**. Determina el valor de los parámetros reales a, b y c para que pueda aplicarse el Teorema de Rolle a la función $f(x)$ en el intervalo $[-2, 3]$. ¿Cuál es el punto o puntos que predice la tesis?

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx & -2\le x<0 \\ c+\sqrt{x+1} & 0\le x\le 3 \end{cases}$$

Enunciaremos primeramente el Teorema de Rolle para dejar constancia de sus premisas y su tesis o conclusión:

Sea una función $f(x)$ definida en $[a, b]$ que verifica las siguientes tres condiciones:

- $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$
- $f(x)$ es una función derivable en el intervalo abierto (a, b)
- $f(a)=f(b)$

Entonces existe un punto c interior del intervalo (a, b) donde la derivada de la función se anula, expresándolo matemáticamente:

$$\exists c\in(a, b) \mid f'(c)=0$$

Así pues, **vamos ahora a calcular el valor de los parámetros reales a, b y c para que se cumplan las tres premisas del Teorema de Rolle**. Como puede comprobarse fácilmente, el dominio de la función propuesta en este caso es $[-2, 3]$. Obsérvese que para $0<x\le 3$ la función $f(x)=c+\sqrt{x+1}$ no presenta problemas de dominio ya que está definida siempre que $x\in[-1, +\infty)$.

La función $f(x)$ debe ser **continua** en el intervalo $[-2, 3]$. Observamos que:

- Para $-2\le x<0$: la función $f(x)=ax^2+bx$ que es continua en R por ser un polinomio. En particular, será continua en $-2\le x<0$.
- Para $0<x\le 3$: la función $f(x)=c+\sqrt{x+1}$ es continua en $x\in[-1, +\infty)$. Así pues, en particular será continua en $0<x\le 3$.

Por tanto, el único punto en el que debemos prestar especial detalle para la continuidad es en el punto de cambio $x=0$.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=c+\sqrt{0+1}=c+1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} c+\sqrt{x+1}=c+1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} ax^2+bx=0 \end{array}\right\} \Rightarrow c+1=0 \quad \Rightarrow \quad c=-1$$

Para que la función $f(x)$ sea continua en $[-2,3]$, debe cumplirse que $c=-1$.

Ahora bien, la función $f(x)$ también debe ser **derivable** $(-2,3)$:

- Para $-2<x<0$: la función $f(x)=ax^2+bx$ que es derivable en R por ser un polinomio. En particular, será derivable en $-2<x<0$.
- Para $0<x<3$: la función $f(x)=c+\sqrt{x+1}$ es derivable en $x\in[-1,+\infty)$. Así pues, en particular será derivable en $0<x<3$.

Por tanto, el único punto en el que debemos prestar especial detalle para la derivabilidad es en el punto de cambio $x=0$.

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx & -2\le x<0 \\ c+\sqrt{x+1} & 0\le x\le 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\begin{cases} 2ax+b & -2<x<0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} & 0<x<3 \end{cases}$$

Las derivadas laterales en deben coincidir para asegurar la derivabilidad de $f(x)$ en el intervalo abierto $(-2,3)$. Es decir:

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{0+1}}=\dfrac{1}{2} \\ f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=2a\cdot 0+b=b \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f'(0^+)=f'(0^-) \quad \Rightarrow \quad b=\frac{1}{2}$$

Para que la función $f(x)$ sea derivable en $(-2,3)$, debe cumplirse que $b=\frac{1}{2}$.

La tercera condición que debe verificar la función $f(x)$ es que $f(-2)=f(3)$. Es decir:

$$f(-2)=f(3) \quad \Rightarrow \quad 4a-2b=c+\sqrt{3+1} \quad \Rightarrow \quad 4a-1=1 \quad \Rightarrow \quad 4a=2 \quad \Rightarrow \quad a=\frac{1}{2}$$

Así pues, para que pueda aplicarse el Teorema de Rolle a la función $f(x)$ en el intervalo $[-2,3]$ debe cumplirse que $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$ y $c=-1$.

Calculemos ahora el/los punto/s que predice el teorema. Para ello, simplemente deberemos igualar a cero la derivada y resolver la ecuación o ecuaciones resultantes:

$$f'(x) = \begin{cases} x + \dfrac{1}{2} & -2 < x < 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} & 0 < x < 3 \end{cases}$$

Así pues:

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 \neq 0 \end{cases}$$

Por tanto, el punto que predice el teorema de Rolle, en este caso es $x = -\dfrac{1}{2}$**.**

3. **Enuncia el Teorema de Lagrange**. Tras ello, considera la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+4x+3 & -3\le x<0 \\ -x^2+ax+b & 0\le x\le 2 \end{cases}$$

   a. Determina el valor de los parámetros reales a y b para que pueda aplicarse el Teorema de Lagrange a $f(x)$ en el intervalo $[-3, 2]$.
   b. ¿Existe algún punto de la curva $y=f(x)$ en el que la tangente es paralela a la cuerda que une los puntos $A(-3, f(-3))$ y $B(2, f(2))$? ¿Podrías averiguar dicho punto?

Enunciaremos primeramente el Teorema de Lagrange (valor medio) para dejar constancia de sus premisas y su tesis o conclusión:

Sea una función $f(x)$ definida en $[a, b]$ que verifica las siguientes condiciones:

- $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$
- $f(x)$ es una función derivable en el intervalo abierto (a, b)

Entonces existe un punto c interior del intervalo (a, b) donde la derivada de la función coincide con la pendiente de la recta que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, expresándolo matemáticamente:

$$\exists c\in(a, b)\,\Big|\, f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Así pues, **vamos ahora a calcular el valor de los parámetros reales a, b y c para que se cumplan las tres premisas del Teorema de Lagrange**. Como puede comprobarse fácilmente, el dominio de la función propuesta en este caso es R. Obsérvese que en ambos tramos la función es un polinomio y en consecuencia no presenta problemas de definición.

La función $f(x)$ debe ser **continua** en el intervalo $[-3, 2]$. Observamos que:

- Para $-3 < x < 0$: la función $f(x)$ es continua en R por ser un polinomio. En particular, será continua en $-3 < x < 0$.
- Para $0 < x < 2$: la función $f(x)$ es continua en R. Así pues, en particular será continua en $0 < x < 2$.

Por tanto, el único punto en el que debemos prestar especial detalle para la continuidad es en el punto de cambio $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = -0^2 + a\cdot 0 + b = b \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} -x^2 + ax + b = b \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x^2 + 4x + 3 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow b = 3$$

Ahora bien, la función $f(x)$ también debe ser **<u>derivable</u>** $(-3, 2)$:

- Para $-3 < x < 0$: la función $f(x)$ que es derivable en R por ser un polinomio. En particular, será derivable en $-3 < x < 0$.
- Para $0 < x < 2$: la función $f(x)$ es derivable en R por ser un polinomio. Así pues, en particular será derivable en $0 < x < 2$.

Por tanto, el único punto en el que debemos prestar especial detalle para la derivabilidad es en el punto de cambio $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3 & -3 \le x < 0 \\ -x^2 + ax + b & 0 \le x \le 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \begin{cases} 2x + 4 & -3 < x < 0 \\ -2x + a & 0 < x < 2 \end{cases}$$

Las derivadas laterales en $x = 0$ deben coincidir para asegurar la derivabilidad de $f(x)$ en el intervalo abierto $(-3, 2)$. Es decir:

$$\left.\begin{array}{l} f'(0+) = \lim\limits_{x\to 0+} f'(x) = -2\cdot 0 + a = a \\ f'(0-) = \lim\limits_{x\to 0-} f'(x) = 2\cdot 0 + 4 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f'(0+) = f'(0-) \quad \Rightarrow \quad a = 4$$

Así pues, **para que pueda aplicarse el Teorema de Lagrange a la función $f(x)$ en el intervalo $[-3, 2]$ debe cumplirse que $a = 4$ y $b = 3$.**

Calculemos ahora el punto donde se verifica la tesis del teorema. Deberemos pues resolver la ecuación:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 4 & -3 < x < 0 \\ -2x + 4 & 0 < x < 2 \end{cases}$$

Vemos que:

$$\left.\begin{array}{l} f(-3) = 9 - 12 + 3 = 0 \\ f(2) = -4 + 8 + 3 = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(c) = \frac{7 - 0}{2 - (-3)} = \frac{7}{3}$$

$$f'(c) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2c + 4 = \frac{7}{3} \\ -2c + 4 = \frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = \frac{-5}{6} \\ c = \frac{5}{6} \end{cases}$$

Así pues, los puntos del intervalo $(-3, 2)$ donde se cumple la tesis son $c = \pm\frac{5}{6}$

4. Demuestra que la ecuación $x^5 + 5x + 4 = 0$ tiene **una única solución** en el intervalo $[-1, 1]$.

Primeramente comprobaremos que posee alguna solución aplicando el Teorema de Bolzano. Para ello, definimos la función:

$$f(x) = x^5 + 5x + 4$$

Podemos ver que:

- La función $f(x)$ es continua en todo R por ser un polinomio y en consecuencia será continua en cualquier intervalo cerrado que consideremos. En particular lo será en $[-1, 1]$.
- Vemos que toma valores de signo opuesto en los extremos del intervalo:

$$f(-1) = -1 - 5 + 4 = -2 < 0$$
$$f(1) = 1 + 5 + 4 = 10 > 0$$

Así pues, por el Teorema de Bolzano podemos concluir que:

$$\exists c \in (-1, 1) \mid f(c) = 0$$

Demostraremos ahora que la solución es única utilizando la técnica de reducción al absurdo. **Supongamos que existen dos soluciones distintas en el intervalo $(-1, 1)$ de la ecuación propuesta** que llamaremos c_1 y c_2.

Por ser soluciones, sabemos que verificarán la ecuación, es decir:

$$f(c_1) = 0 \ \text{ y } \ f(c_2) = 0 \ \Rightarrow \ f(c_1) = f(c_2)$$

Así pues, observamos que:

- La función $f(x)$ es continua en R y en particular lo será en el intervalo $[c_1, c_2]$.
- La función $f(x)$ es un polinomio. En consecuencia es derivable en R y en particular lo será en el intervalo abierto (c_1, c_2).
- Además, como hemos visto, se verifica que: $f(c_1) = f(c_2)$

Por tanto, dado que se cumplen las hipótesis del Teorema de Rolle podemos afirmar que $\exists d \in (c_1, c_2) \mid f'(d) = 0$

Ahora bien, por otro lado, si calculamos la derivada de $f(x)$ y la igualamos a cero se observa que:

$$f(x) = x^5 + 5x + 4 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 5x^4 + 5 \quad \Rightarrow \quad 5x^4 + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[4]{-1} \notin R$$

Es decir, no existe ningún punto donde la derivada de $f(x)$ se anule. Esto entra en contradicción con lo que acabamos de deducir a través del Teorema de Rolle.

Observamos que, tras suponer que existían dos soluciones distintas de la ecuación propuesta en el intervalo $(-1, 1)$ hemos llegado a una contradicción lógica. Por tanto, no nos queda más remedio que concluir que nuestra suposición inicial era falsa. **Por todo ello, podemos asegurar que la ecuación $x^5 + 5x + 4 = 0$ tiene una única solución en el intervalo $(-1, 1)$.**

5. **Representa** gráficamente las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2-1}$ b) $g(x)=\dfrac{x^2}{x^3-1}$ c) $h(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ d) $i(x)=\dfrac{x}{e^x}$

Solo representaremos la función del apartado a) y d). El resto se procede mediante un estudio similar.

a) Estudiemos la función $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2-1}$

- **<u>DOMINIO</u>**: Dado que el denominador de la función se anula en

$$x^2-1=0 \quad \Rightarrow \quad x=\pm 1$$

el dominio de $f(x)$ es $D\left[f(x)\right]=R-\{\pm 1\}$.

- **<u>CONTINUIDAD</u>**: La función $f(x)$ es continua en $R-\{\pm 1\}$.
- **<u>SIMETRÍAS</u>**: En este caso, la función no presenta ningún tipo de simetría ya que:

$$f(-x)=\frac{-x^3+1}{x^2-1}\neq f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x)\ no\ tiene\ simetría\ par$$

$$f(-x)=\frac{-x^3+1}{x^2-1}\neq -f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x)\ no\ tiene\ simetría\ impar$$

- **<u>CORTES CON LOS EJES COORDENADOS</u>**:

Corte con el eje OY: $x=0 \quad \Rightarrow \quad f(0)=\dfrac{1}{-1}=-1 \quad \Rightarrow \quad P\left(0,-1\right)$

Corte con el eje OX: $f(x)=0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x^3+1}{x^2-1}=0 \quad \Rightarrow \quad x=-1 \quad \Rightarrow \quad Q\left(-1,0\right)$

- **<u>ASÍNTOTAS</u>**:

  - **<u>Asíntotas verticales</u>**: Se buscan y estudian en aquellos puntos problemáticos respecto al dominio.

$$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+}\frac{x^3+1}{x^2-1}=+\infty \qquad \lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1+}\frac{x^3+1}{x^2-1}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x^2-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left[L'Hôpital\right]=\lim_{x\to -1}\frac{3x^2}{2x}=-\frac{3}{2}$$

Luego, existe una sola asíntotas vertical de ecuación $x=1$.

- **Asíntotas horizontales**: Para saber si una función tiene asíntotas horizontales ha de estudiarse su comportamiento en el infinito.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+1}{x^2-1}=+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+1}{x^2-1}=-\infty$$

En este caso no tenemos asíntota horizontal.

- **Asíntotas oblicuas**: Sabemos que si una función tiene asíntota horizontal entonces no presentará asíntota oblicua. En este caso, al no haber horizontales debemos comprobar si hay oblicuas. De antemano, sabemos que las habrá porque $f(x)$ es una función racional donde el grado del numerador es exactamente una unidad mayor que el grado del denominador. Cuando queramos calcular una asíntota oblicua de una función racional podemos utilizar dos técnicas:

Técnica 1: Emplear la fórmula estudiada en clase:

$$\left.\begin{array}{l} m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{x^3+1}{x^2-1}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{x^3-x}=1 \\ n=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-mx=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{x^2-1}-x=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x^2-1}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y=x$$

Técnica 2: Realizar la división de polinomios. El cociente de la división será la asíntota oblicua.

$$\begin{array}{r|l} x^3+\quad 1 & x^2-1 \\ \cline{2-2} -x^3+x & x \\ \hline x+1 & \end{array}$$

- **PERIODICIDAD**: La función propuesta no tiene ningún tipo de periodicidad.
- **MONOTONÍA**: Realicemos el estudio de la primera derivada:

$$f(x)=\frac{x^3+1}{x^2-1} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{x^4-3x^2-2x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{x\cdot(x+1)^2\cdot(x-2)}{\left(x^2-1\right)^2}$$

Igualamos la derivada a cero para obtener los puntos críticos:

$$f'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x\cdot(x+1)^2\cdot(x-2)}{\left(x^2-1\right)^2}=0 \quad \Rightarrow \quad x=0 \quad x=-1 \quad x=2$$

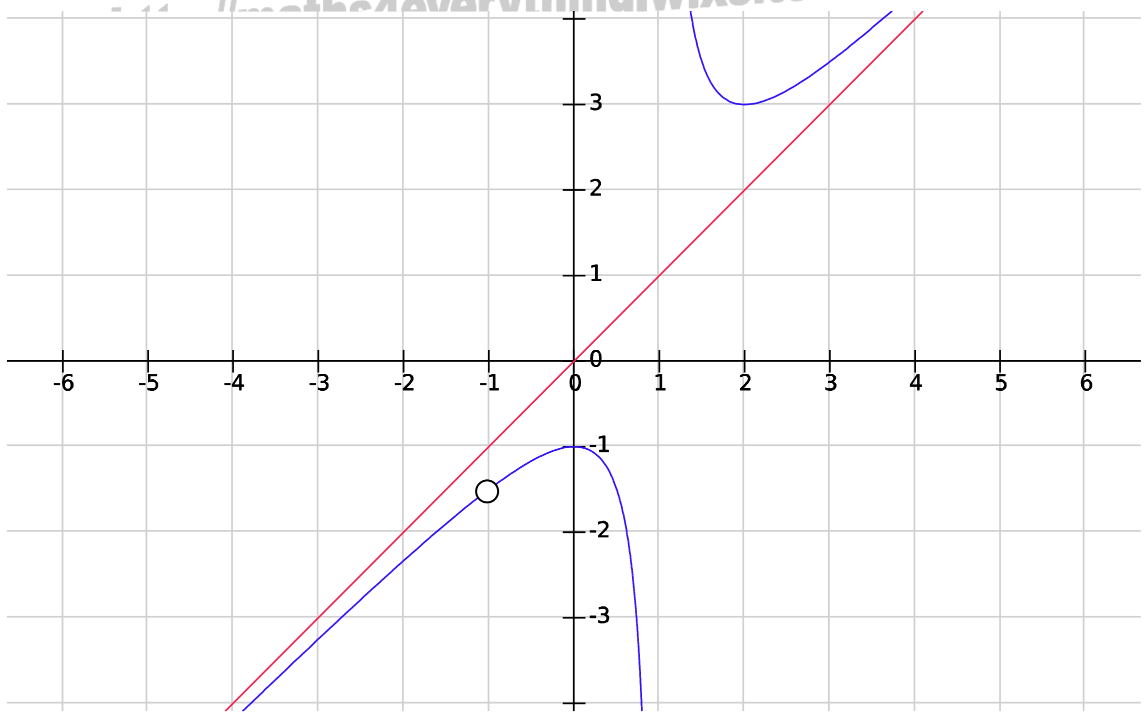
Analizaremos ahora la monotonía de la función:

	$-\infty$ a -1	-1 a 0	0 a 1	1 a 2	2 a $+\infty$
Signo de f'(x)	+	+	-	-	+
Monotonía de f(x)	↗	↗	↘	↘	↗

Así pues, la función presenta un máximo relativo en $(0,-1)$y un mínimo relativo en $(2,3)$. Es creciente en el intervalo $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(2,+\infty)$ y decreciente en el intervalo $(0,1)\cup(1,2)$.

- **<u>CURVATURA</u>**: Obviaremos este paso debido a la complejidad de la segunda derivada.

Con toda esta información, se tiene que la[1] representación gráfica de la función $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2-1}$ propuesta es la que se muestra a continuación:



d) Estudiemos la función $i(x)=\dfrac{x}{e^x}$

- **DOMINIO**: Dado que el denominador de la función nunca se anula

$$e^x=0 \quad \Rightarrow \quad No\ tiene\ solución$$

el dominio de $i(x)$ es todo el conjunto de los números reales.

- **CONTINUIDAD**: La función $i(x)$ es continua por ser el cociente de dos funciones continuas siendo la que actúa como denominador una función positiva que no se anula nunca.

- **SIMETRÍAS**: En este caso, la función no presenta ningún tipo de simetría ya que:

$$i(-x)=-\frac{x}{e^{-x}}\neq i(x) \quad \Rightarrow \quad i(x)\ no\ tiene\ simetría\ par$$

$$i(-x)=-\frac{x}{e^{-x}}\neq -i(x) \quad \Rightarrow \quad i(x)\ no\ tiene\ simetría\ impar$$

- **CORTES CON LOS EJES COORDENADOS**:

Corte con el eje OY: $x=0 \quad \Rightarrow \quad i(0)=\dfrac{0}{e^0}=\dfrac{0}{1}=0 \quad \Rightarrow \quad O\left(0,0\right)$

Corte con el eje OX: $i(x)=0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x}{e^x}=0 \quad \Rightarrow \quad x=0 \quad \Rightarrow \quad O\left(0,0\right)$

Así pues, el único punto donde la función corta a los ejes coordenados es en el origen de coordenadas $O\left(0,0\right)$.

- **ASÍNTOTAS**:
  - **Asíntotas verticales**: Se buscan y estudian en aquellos puntos problemáticos respecto al dominio. Dado que en este caso el dominio de es todo el conjunto de los números reales, concluimos que no tiene asíntotas verticales.

  - **Asíntotas horizontales**: Para saber si una función tiene asíntotas horizontales ha de estudiarse su comportamiento en el infinito.

$$\lim_{x\to+\infty} i(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\left[\begin{array}{c}Aplicando\\ L'Hôpital...\end{array}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty} i(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x}=\left[\frac{-\infty}{0}\right]=-\infty$$

En este caso sólo tenemos una asíntota horizontal en $y=0$ cuando $x \to +\infty$. Cuando $x \to -\infty$ no hay asíntota horizontal.

- **<u>Asíntotas oblicuas</u>**: Sabemos que si una función tiene asíntota horizontal entonces no presentará asíntota oblicua. En este caso, cuando $x \to +\infty$ la función presenta una asíntota horizontal y por tanto sabemos que no habrá oblicua. Sin embargo, cuando $x \to -\infty$ no hay asíntota horizontal y por tanto cabe la posibilidad de que exista oblicua. Averigüémoslo:

$$m = \underset{x \to -\infty}{Lim} \frac{i(x)}{x} = \underset{x \to -\infty}{Lim} \frac{\frac{x}{e^x}}{x} = \underset{x \to -\infty}{Lim} \frac{1}{e^x} = +\infty$$

Dado que la pendiente de la asíntota oblicua no es finita, podemos asegurar que la función propuesta no posee asíntotas oblicuas.

- **<u>PERIODICIDAD</u>**: La función propuesta no tiene ningún tipo de periodicidad.
- **<u>MONOTONÍA</u>**: Realicemos el estudio de la primera derivada:

$$i(x) = \frac{x}{e^x} \quad \Rightarrow \quad i'(x) = \frac{e^x - x \cdot e^x}{\left(e^x\right)^2} = \frac{e^x \cdot (1-x)}{\left(e^x\right)^2} = \frac{1-x}{e^x}$$

Igualamos la derivada a cero para obtener los puntos críticos:

$$i'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1-x}{e^x} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

Analizaremos ahora la monotonía de la función:

	$-\infty$ ... 1	1 ... $+\infty$
Signo de i'(x)	+	-
Monotonía de i(x)	↗	↘

Así pues, la función presenta un máximo absoluto en $\left(1, \frac{1}{e}\right)$. Es creciente en el intervalo $(-\infty, 1)$ y decreciente en el intervalo $(1, +\infty)$.

- **<u>CURVATURA</u>**: Realicemos el estudio de la segunda derivada:

$$i'(x) = \frac{1-x}{e^x} \quad \Rightarrow \quad i''(x) = \frac{-e^x - e^x \cdot (1-x)}{\left(e^x\right)^2} = \frac{-e^x \cdot (2-x)}{\left(e^x\right)^2} = \frac{x-2}{e^x}$$

Igualamos la segunda derivada a cero para obtener los posibles puntos de inflexión:

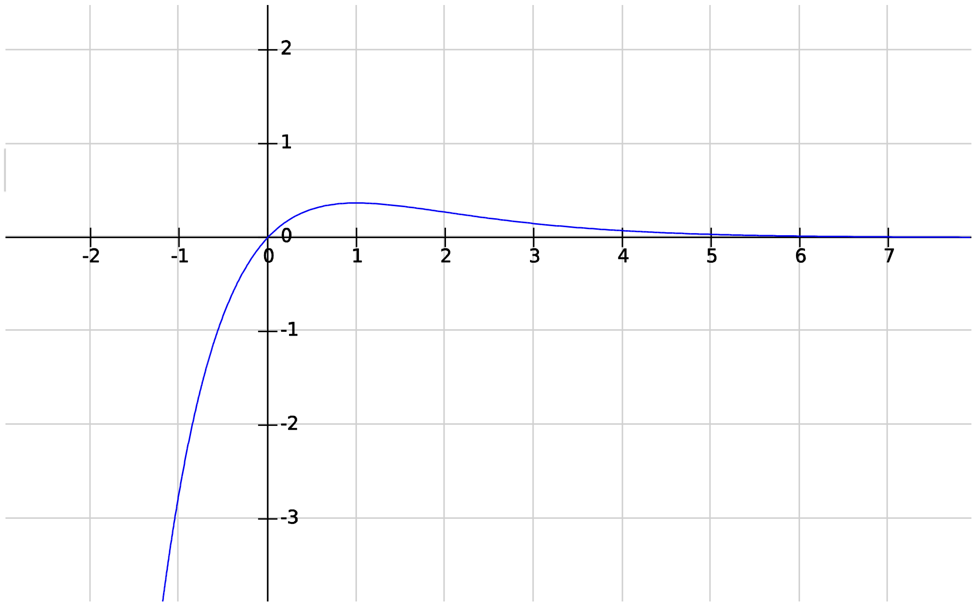
$$i''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x-2}{e^x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

Analizaremos ahora la monotonía de la función:

	$-\infty$ … 2	2 … $+\infty$
Signo de i''(x)	-	+
Curvatura de i(x)	$\cap$	$\cup$

Así pues, la función presenta un punto de inflexión en $\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$. Es cóncava en el intervalo $(-\infty, 2)$ y convexa en el intervalo $(2, +\infty)$.

Con toda esta información, se tiene que la representación gráfica de la función $i(x) = \frac{x}{e^x}$ propuesta es la que se muestra a continuación:



6. Calcula los siguientes límites, si existen:

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}$ d) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{sen\ x}{x}\right)^{1/x^2}$ g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\ x \cdot (1-sen\ x)}{\cos^2 x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2arctg\ x - x}{2x - arcsen\ x}$ e) $\lim\limits_{x \to 0+} Ln\ x \cdot tg\ x$ h) $\lim\limits_{x \to 0+} x^3 \cdot e^{1/x}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x - 1}$ f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x + Ln\,(x+1)}{\sqrt{x^2-3}}$ i) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{tg\ x}$

a) $$\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x} \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}\right)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+x-x^2+x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}} == \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \begin{bmatrix} comparación \\ de\ grados \end{bmatrix} = \frac{2}{2} = 1$$

b) $$\lim_{x \to 0} \frac{2arctg\ x - x}{2x - arcsen\ x} \overset{\frac{0}{0}}{=} [L'\,Hôpital] = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{2}{1+x^2}-1}{2-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \frac{2-1}{2-1} = 1$$

c) $$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2}-1}{\cos x - 1} \overset{\frac{0}{0}}{=} [L'\,Hôpital] = \lim_{x \to 0} \frac{2xe^{x^2}}{-sen\ x} \overset{\frac{0}{0}}{=} [L'\,Hôpital] = \lim_{x \to 0} \frac{2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}}{-\cos x} = -2$$

d) $$\lim_{x \to 0} \left(\frac{sen\ x}{x}\right)^{1/x^2} \overset{1^\infty}{=} e^A$$

$$A = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}\cdot\left(\frac{sen\ x}{x}-1\right) = \lim_{x \to 0} \frac{sen\ x - x}{x^3} \overset{\frac{0}{0}}{=} [L'\,Hôpital] = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} [L'\,Hôpital] =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-sen\ x}{6x} \overset{\frac{0}{0}}{=} [L'\,Hôpital] = \lim_{x \to 0} \frac{-\cos x}{6} = -\frac{1}{6} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \left(\frac{sen\ x}{x}\right)^{1/x^2} = e^{\frac{-1}{6}} = \frac{1}{\sqrt[6]{e}}$$

e) $$\lim_{x \to 0+} Ln\, x \cdot tg\, x \overset{-\infty \cdot 0}{=} \lim_{x \to 0+} \frac{Ln\, x}{\frac{1}{tg\, x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} [L'\,Hôpital] = \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{tg^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}} =$$

$$= \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos^2 x}{sen^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{sen^2 x}} = \lim_{x \to 0+} \frac{-sen^2 x}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} [L'\,Hôpital] =$$

$$= \lim_{x \to 0+} \frac{-2 \cdot sen\, x \cdot \cos x}{1} = 0$$

f) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x + Ln(x+1)}{\sqrt{x^2 - 3}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} [L'\,Hôpital] = \lim_{x \to +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x+1}}{\frac{x}{\sqrt{x^2-3}}} = \frac{3}{1} = 3$$

g) $$\lim_{x \to 0} \frac{sen\, x \cdot (1 - sen\, x)}{\cos^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{sen\, x \cdot (1 - sen\, x)}{1 - sen^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{sen\, x \cdot (1 - sen\, x)}{(1 - sen\, x) \cdot (1 + sen\, x)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{1 + sen\, x} = \frac{0}{1} = 0$$

h) $$\lim_{x \to 0+} x^3 \cdot e^{1/x} \overset{0 \cdot \infty}{=} \lim_{x \to 0+} \frac{e^{1/x}}{\frac{1}{x^3}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} [L'\,Hôpital] = \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{-1}{x^2} \cdot e^{1/x}}{\frac{-3}{x^4}} = \lim_{x \to 0+} \frac{x^4 \cdot e^{1/x}}{3x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0+} \frac{x^2 \cdot e^{1/x}}{3} \overset{0 \cdot \infty}{=} \lim_{x \to 0+} \frac{e^{1/x}}{\frac{3}{x^2}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} [L'\,Hôpital] = \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{-1}{x^2} \cdot e^{1/x}}{\frac{-6}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x \to 0+} \frac{e^{1/x}}{\frac{6}{x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} [L'\,Hôpital] = \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{-1}{x^2} \cdot e^{1/x}}{\frac{-6}{x^2}} = \lim_{x \to 0+} \frac{e^{1/x}}{6} = \infty$$

i) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{tg\, x} \overset{\infty^0}{=} A$

$$Ln\ A = \lim_{x \to 0} Ln \left[\left(\frac{1}{x^2} \right)^{tg\, x} \right] = \lim_{x \to 0} tg\ x \cdot Ln\left(x^{-2}\right) \overset{0\cdot\infty}{=} \lim_{x \to 0+} \frac{Ln\ x^{-2}}{\frac{1}{tg\ x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} [L'\,Hôpital] =$$

$$= \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{-2}{x}}{\frac{-1}{tg^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{-2}{x}}{\frac{-1}{sen^2 x}} = \lim_{x \to 0+} \frac{2sen^2 x}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} [L'\,Hôpital] =$$

$$= \lim_{x \to 0+} \frac{4 \cdot sen\ x \cdot \cos x}{1} = 0 \quad \Rightarrow \quad Ln\ A = 0 \quad \Rightarrow \quad A = e^0 = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{tg\, x} = 1$$

7. En cada caso, **calcula la ecuación de la recta tangente** a:

   a. la función $f(x)=e^{1-x^2}$ en su **punto de corte** con la recta $y=1$.

   b. la función $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ que **pasa por** el punto $(1,1)$.

   c. la función $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ y que es **paralela a** la recta $y-x+2=0$.

   d. la función $f(x)=Ln\left(x^2-4x-1\right)$ y que es **perpendicular a** la recta $2x-y+3=0$.

   e. la función $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ y que **forma un ángulo de 60º** con la horizontal.

a) Primeramente, calcularemos el punto de corte de la función $f(x)=e^{1-x^2}$ con la recta $y=1$. Para ello, simplemente hemos de resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} y=e^{1-x^2} \\ y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad e^{1-x^2}=1 \quad \Rightarrow \quad 1-x^2=0 \quad \Rightarrow \quad x=\pm 1$$

Así pues, ya podemos construir sin mucha complicación la ecuación de la recta tangente que nos piden (que en este caso son dos). Necesitaremos la derivada de la función:

$$f(x)=e^{1-x^2} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=-2xe^{1-x^2}$$

La recta tangente para $x=-1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=e^0=1 \\ f'(-1)=-2\cdot(-1)\cdot e^0=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y-1=2\cdot(x+1) \quad \Rightarrow \quad y=2x+3$$

La recta tangente para $x=1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=e^0=1 \\ f'(1)=-2\cdot 1\cdot e^0=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y-1=-2\cdot(x-1) \quad \Rightarrow \quad y=-2x+3$$

b) En este caso observamos que el punto proporcionado no pertenece a la función. Así pues deberemos primeramente averiguar de qué punto de la función parte la recta tangente. Dado que la derivada de $f(x)$ es:

$$f(x)=\frac{1}{1-x} \quad \Rightarrow f'(x)=-\frac{-1}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2}$$

La ecuación de cualquier recta tangente a la función $f(x)$ en un punto genérico de abscisa $x=a$ será:

$$y-f(a)=f'(a)\cdot(x-a)$$
$$y-\frac{1}{1-a}=\frac{1}{(1-a)^2}\cdot(x-a)$$

Sabemos que la recta que buscamos debe pasar por el punto $(1,1)$. Así pues, sustituyéndolo en la ecuación de la recta observamos que:

$$1-\frac{1}{1-a}=\frac{1}{(1-a)^2}\cdot(1-a) \quad \Rightarrow \quad 1-\frac{1}{1-a}=\frac{1}{1-a} \quad \Rightarrow \quad (1-a)-1=1 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 1-a=2 \quad \Rightarrow \quad a=-1$$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente que nos piden será:

$$y-\frac{1}{1-a}=\frac{1}{(1-a)^2}\cdot(x-a) \quad \Rightarrow \quad y-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\cdot(x+1) \quad \Rightarrow \quad y=\frac{x+3}{4}$$

c) Sabemos que la recta tangente que piden es paralela a la recta $y-x+2=0$. Así pues, la pendiente de dicha recta deberá coincidir con la derivada de la función $f(x)$. Esta relación nos permitirá averiguar el punto de la curva desde el cual parte la recta tangente:

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{x^2+1-x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Como la pendiente de la recta $y=x-2$ es $m=1$, se tiene que:

$$f'(x)=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=1 \quad \Rightarrow \quad 1-x^2=\left(x^2+1\right)^2 \quad \Rightarrow \quad 1-x^2=x^4+2x^2+1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x^4+3x^2=0 \quad \Rightarrow \quad x^2\cdot\left(x^2+3\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=0 \\ x=\sqrt{-3}\notin R \end{cases}$$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente que nos piden es aquella que pasa por el punto de la curva cuya abscisa es $x=0$:

$$y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0) \quad \Rightarrow \quad y-0=1\cdot(x-0) \quad \Rightarrow \quad y=x$$

d) La recta tangente que piden debe ser perpendicular a la recta $2x-y+3=0$. Ello implica que su pendiente deberá ser:

$$2x-y+3=0 \quad \Rightarrow \quad y=2x+3 \quad \Rightarrow \quad m_{\perp}=2 \quad \Rightarrow \quad m=-\frac{1}{2}$$

Igualando la derivada de la función a dicha pendiente obtenemos el punto de la curva desde el cual parte la recta tangente en la que estamos interesados:

$$f(x)=Ln\left(x^2-4x-1\right) \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{2x-4}{x^2-4x-1}$$

$$f'(x)=\frac{-1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{2x-4}{x^2-4x-1}=\frac{-1}{2} \quad \Rightarrow \quad 4x-8=-x^2+4x+1 \quad \Rightarrow \quad 9=x^2 \quad \Rightarrow \quad x=\pm 3$$

Dado que no pertenece al dominio de la función (pues para este valor el argumento del logaritmo resulta negativo) sólo tenemos un único punto para el cual calcular la recta tangente. Para $x=-3$:

$$\left.\begin{array}{l} f(-3) = Ln\left(9+12-1\right) = Ln\ 20 \\ f'(-3) = \dfrac{-10}{20} = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y - Ln\ 20 = -\frac{1}{2}\cdot\left(x+3\right) \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}\cdot\left(x+3\right) + Ln\ 20$$

e) Dado que la recta tangente forma un ángulo de 60º con la horizontal, su pendiente coincidirá con la tangente de dicho ángulo. Así pues:

$$tg\ 60^{\circ} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \sqrt{3}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2-1} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{3x^2-3} \quad \Rightarrow \quad x^2 = 3x^2-3 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Así pues, hay dos rectas tangentes que cumplen la condición propuesta.

La recta tangente para $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$:

$$f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \sqrt{\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad y - \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}\cdot\left(x + \sqrt{\frac{3}{2}}\right) \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{2}$$

La recta tangente para $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$:

$$f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad y - \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}\cdot\left(x - \sqrt{\frac{3}{2}}\right) \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{3}x - \sqrt{2}$$

8. Calcula la **ecuación de la recta normal** de la gráfica de la función $f(x)=2x^3-6x^2+4$ en su punto de inflexión.

La ecuación de la recta normal a una función en un punto de abscisa $x=a$ es:

$$y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}\cdot(x-a)$$

Así pues lo único que deberemos calcular es el punto de inflexión desde el cual parte la recta normal y la derivada de la función. Comencemos con el punto de inflexión. Para ello debemos recurrir al estudio de la segunda derivada:

$$f(x)=2x^3-6x^2+4 \quad\Rightarrow\quad f'(x)=6x^2-12x \quad\Rightarrow\quad f''(x)=12x-12$$
$$12x-12=0 \quad\Rightarrow\quad x=1$$

Comprobemos que se trata realmente de un punto de inflexión:

	$-\infty$ 1	1 $+\infty$
Signo de $f''(x)$	—	+
Curvatura de $f(x)$	$\cap$	$\cup$

Una vez hemos comprobado que realmente se trata de un punto de inflexión, calcularemos el resto de elementos necesarios para construir la recta normal:

$$f(1)=2\cdot1^3-6\cdot1^2+4=0$$
$$f'(1)=6\cdot1^2-12\cdot1=-6$$

Finalmente, la recta normal que nos piden viene dada por la ecuación:

$$y-0=-\frac{1}{-6}\cdot(x-1) \quad\Rightarrow\quad y=\frac{x-1}{6}$$

9. Determina el **valor de los parámetros** reales a, b, c y d de la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sabiendo que tiene un máximo en $(1, 0)$ y un mínimo en $(-1, -2)$.

Dado que el punto $(1, 0)$ es un máximo de la función $f(x)$ sabemos que la primera derivada cuando $x = 1$ valdrá cero:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f'(1) = 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad 3a + 2b + c = 0$$

Además, al ser un máximo sabemos que es un punto de la propia curva o función. En consecuencia cuando $x = 1$ debe cumplirse que $f(1) = 0$. Ello nos lleva a:

$$f(1) = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 0 \quad \Rightarrow \quad a + b + c + d = 0$$

Actuando de la misma forma con el punto $(-1, -2)$, sabemos que la primera derivada se anulará para $x = -1$ y por ser punto de la función debe cumplirse además que $f(-1) = -2$:

$$f'(-1) = 3a \cdot (-1)^2 + 2 \cdot b \cdot (-1) + c = 0 \quad \Rightarrow \quad 3a - 2b + c = 0$$

$$f(-1) = a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) + d = -2 \quad \Rightarrow \quad -a + b - c + d = -2$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones resultante:

$$\left.\begin{array}{l} 3a + 2b + c = 0 \\ a + b + c + d = 0 \\ 3a - 2b + c = 0 \\ -a + b - c + d = -2 \end{array}\right\}$$

Restando la primera y tercera ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} 3a+2b+c=0 \\ 3a-2b+c=0 \end{array}\right\} -$$
$$4b \quad =0 \quad \Rightarrow \quad b=0$$

Esto reduce el sistema a las siguientes tres ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 3a+2b+c=0 \\ a+b+c+d=0 \\ 3a-2b+c=0 \\ -a+b-c+d=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3a+c=0 \\ a+c+d=0 \\ -a-c+d=-2 \end{array}\right\}$$

Sumando las dos últimas ecuaciones resulta que:

$$\left.\begin{array}{r} a+c+d=0 \\ -a-c+d=-2 \end{array}\right\} +$$
$$2d=-2 \quad \Rightarrow \quad d=-1$$

Esto hace que el nuevo sistema quede como sigue:

$$\left.\begin{array}{l} 3a+c=0 \\ a+c+d=0 \\ -a-c+d=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3a+c=0 \\ a+c=1 \end{array}\right\}$$

Restando las dos ecuaciones conseguimos obtener el valor de los parámetros restantes:

$$\left.\begin{array}{l} 3a+c=0 \\ a+c=1 \end{array}\right\} -$$
$$2a \quad =-1 \quad \Rightarrow \quad a=-\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad c=1-a=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

Así pues, el valor de los parámetros de la función han de valer $a=-\frac{1}{2}$**,** $b=0$**,** $c=\frac{3}{2}$ **y** $d=-1$**. Es decir, la función adoptará la expresión** $f(x)=-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x-1$

10. **Determina la expresión analítica** de una función polinómica de tercer grado que verifica las siguientes condiciones al mismo tiempo:
    a. Tiene un punto de inflexión en $P(0,3)$.
    b. La recta tangente a su gráfica en $x=-1$ es $y=2x+1$.

Sabemos que la función demandada será de la forma:

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

Calculemos los parámetros a partir de las condiciones proporcionadas. Dado que el punto $P(0,3)$ es un punto de inflexión de la función $f(x)$ sabemos que la segunda derivada cuando $x=0$ valdrá cero:

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \quad\Rightarrow\quad f'(x)=3ax^2+2bx+c \quad\Rightarrow\quad f''(x)=6ax+2b$$
$$f''(0)=6a\cdot 0+2b=0 \quad\Rightarrow\quad 2b=0 \quad\Rightarrow\quad b=0$$

Además, al ser un punto de inflexión sabemos que es un punto de la propia curva o función. En consecuencia cuando $x=0$ debe cumplirse que $f(0)=3$. Ello nos lleva a:

$$f(0)=a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+c\cdot 0+d=3 \quad\Rightarrow\quad d=3$$

Atendiendo a la segunda condición, nos dicen que la recta tangente a la gráfica en $x=-1$ es $y=2x+1$. Ello quiere decir que en $x=-1$ la derivada coincide con el valor de la pendiente de dicha recta, es decir:

$$f'(-1)=3a\cdot(-1)^2+2b\cdot(-1)+c=2 \quad\Rightarrow\quad 3a-2b+c=2 \quad\Rightarrow\quad 3a+c=2$$

Además, sabemos que para la función y su recta tangente adoptarán el mismo valor:

$$f(-1)=a\cdot(-1)^3+b\cdot(-1)^2+c\cdot(-1)+d=-a+b-c+d=-a-c+3$$
$$y(-1)=2\cdot(-1)+1=-2+1=-1$$
$$f(-1)=y(-1) \quad\Rightarrow\quad -a-c+3=-1 \quad\Rightarrow\quad a+c=4$$

Resolviendo el sistema que queda, conseguimos obtener el valor de los parámetros restantes:

$$\left.\begin{array}{l} 3a+c=2 \\ a+c=4 \end{array}\right\} -$$
$$2a \quad = -2 \quad \Rightarrow \quad a=-1 \quad \Rightarrow \quad c=4-a=4+1=5$$

Así pues, el valor de los parámetros de la función han de valer $a=-1$**,** $b=0$**,** $c=5$ **y** $d=3$**. Es decir, la función adoptará la expresión** $f(x)=-x^3+5x+3$

11. **Calcula la derivada** de la función $f(x)=(Ln\ x)^x$.

Debemos utilizar derivación logarítmica para obtener la derivada de la función propuesta. Así pues, aplicamos logaritmos neperianos a ambos miembros:

$$f(x)=(Ln\ x)^x$$

$$Ln\left[f(x)\right]=Ln\ \left[(Ln\ x)^x\right]$$

Aplicando las propiedades de los logaritmos:

$$Ln\left[f(x)\right]=x\cdot Ln\ (Ln\ x)$$

Y ahora derivamos ambos miembros:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=Ln\ (Ln\ x)+x\cdot\frac{1}{Ln\ x}\cdot\frac{1}{x}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=Ln\ (Ln\ x)+\frac{1}{Ln\ x}$$

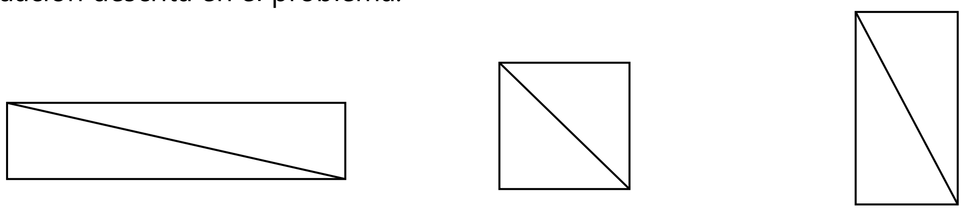
Esto nos lleva a que:

$$f'(x)=f(x)\cdot\left[Ln\ (Ln\ x)+\frac{1}{Ln\ x}\right]$$

$$f'(x)=(Ln\ x)^x\cdot\left[Ln\ (Ln\ x)+\frac{1}{Ln\ x}\right]$$

12. Entre todos los rectángulos de perímetro 12 cm, ¿cuál es el que tiene la **diagonal menor**?

Paso 1: **Realizar una representación gráfica** o simbólica, si fuera posible, de la situación descrita en el problema.



Paso 2: Identificar nuestra función objetivo, es decir, aquello que deseamos optimizar (maximizar o minimizar)

En este caso, nuestra función objetivo es la diagonal del rectángulo, pues deseamos que ésta sea lo más pequeña posible (minimizar)

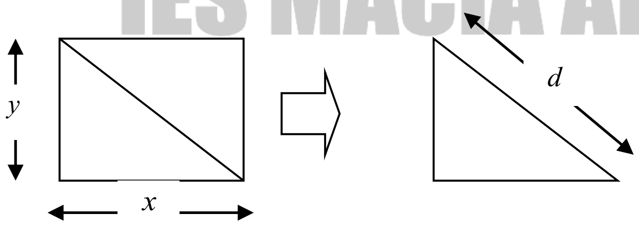
Paso 3: Crear las variables necesarias que pueden interesarnos para la formulación del problema. La pregunta (directa o indirecta) en el enunciado del problema puede ayudarte muchas veces a distinguirlas.

x: longitud (en cm) de la base del rectángulo.

y: longitud (en cm) de la altura del rectángulo.

Paso 4: Construcción de la función objetivo.

Debemos expresar el valor de la diagonal en función de las dos variables que hemos creado. Es decir, vamos a calcular la longitud de la diagonal de un rectángulo en función de la longitud de sus lados.



$$d^2 = x^2 + y^2$$
$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Por tanto, nuestra función objetivo será:

$$d(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

Paso 5: Determinación de la condición de ligadura entre las variables que aparecen en la función objetivo (siempre y cuando haya más de una). Despejar una de las variables de la condición de ligadura y sustituirla en la función objetivo.

En este caso, la condición de ligadura viene determinada por el perímetro del rectángulo, el cual sabemos que siempre es de 12 cm. Así pues:

$$2x+2y=12$$

Por tanto:

$$2x+2y=12 \quad \Rightarrow \quad 2y=12-2x \quad \Rightarrow \quad y=6-x$$

Sustituyendo en la función objetivo:

$$d(x,y)=\sqrt{x^2+y^2} \quad \Rightarrow \quad d(x)=\sqrt{x^2+(6-x)^2}$$

Paso 6: Ahora que la función objetivo depende de una única variable, **derivamos y calculamos los extremos relativos** (máximos o mínimos)

$$d(x)=\sqrt{x^2+(6-x)^2} \quad \Rightarrow \quad d'(x)=\frac{2x-2\cdot(6-x)}{2\cdot\sqrt{x^2+(6-x)^2}} \quad \Rightarrow \quad d'(x)=\frac{4x-12}{2\cdot\sqrt{x^2+(6-x)^2}}$$

Igualamos a cero la derivada y obtenemos los puntos críticos:

$$d'(x)=\frac{4x-12}{2\cdot\sqrt{x^2+(6-x)^2}}=0 \quad \Rightarrow \quad 4x-12=0 \quad \Rightarrow \quad x=3$$

Construimos una tabla con los posibles valores de la variable x para determinar cuál es el valor que resuelve nuestro problema.

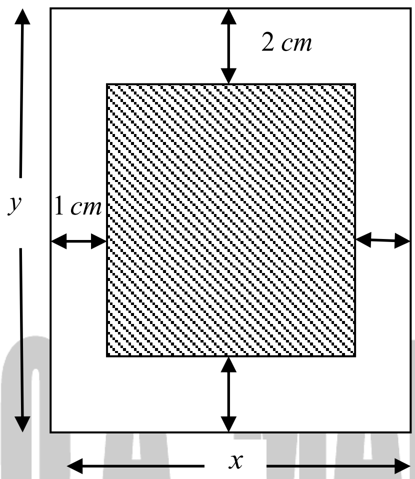
	0 — 3	3 — 6
Signo de $d'(x)$	$-$	$+$
Monotonía de $d(x)$	↘	↗

Paso 7: Proporcionar explícitamente la solución del problema, dando una interpretación adecuado de los resultados.

A la vista de los resultados, vemos que el valor mínimo de la diagonal para un rectángulo de perímetro 12 cm se alcanza cuando su base tiene una longitud de 3 cm y su altura una longitud de $y = 6 - 3 = 3$ cm.

13. Una hoja de papel debe contener 18 cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben tener 2 cm. cada uno, y los laterales 1 cm. Halla las dimensiones de la hoja para que el **gasto de papel sea mínimo**.

Paso 1: Realizar una representación gráfica o simbólica.



Paso 2: Identificación de la función objetivo

En este caso, nuestra función objetivo será el área de la hoja, pues cuanto más pequeña sea, más barata será y por tanto el gasto será mínimo.

Paso 3: Creación de variables.

x: longitud (en cm) del ancho de la hoja

y: longitud (en cm) del largo de la hoja

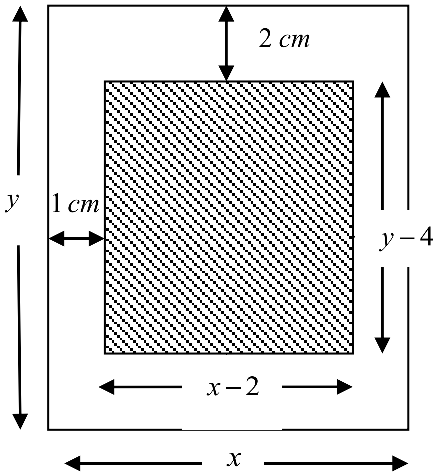
Paso 4: Construcción analítica de la función objetivo.

En este caso, nuestra función objetivo será el área de la hoja completa, es decir:

$$A(x,y) = x \cdot y$$

Paso 5: Determinación de la condición de ligadura entre las variables que aparecen en la función objetivo.

En este caso, la condición de ligadura viene determinada por el área de la superficie que debe estar escrita sobre la hoja. Así pues:



$$(y-4)\cdot(x-2)=18$$

Por tanto:

$$(y-4)\cdot(x-2)=18 \;\Rightarrow\; y-4=\frac{18}{x-2}$$
$$\Rightarrow\; y=\frac{18}{x-2}+4$$

Sustituyendo en la función objetivo: $A(x,y)=x\cdot y \;\Rightarrow\; A(x)=x\cdot\left(\frac{18}{x-2}+4\right)$

Paso 6: Ahora que la función objetivo depende de una única variable, **derivamos y calculamos los extremos relativos** (máximos o mínimos)

$$A(x)=x\cdot\left(\frac{18}{x-2}+4\right) \;\Rightarrow\; A'(x)=1\cdot\left(\frac{18}{x-2}+4\right)+x\cdot\left(\frac{-18}{(x-2)^2}\right)=\frac{18}{x-2}-\frac{18x}{(x-2)^2}+4$$

Igualamos a cero la derivada y obtenemos los puntos críticos:

$$A'(x)=\frac{18}{x-2}-\frac{18x}{(x-2)^2}+4=0 \;\Rightarrow\; 18\cdot(x-2)-18x+4\cdot(x-2)^2=0$$

$$18x-36-18x+4x^2+16-16x=0 \;\Rightarrow\; 4x^2-16x-20=0$$

$$4x^2-16x-20=0 \;\Rightarrow\; x^2-4x-5=0 \;\Rightarrow\; x=5 \quad x=-1$$

Construimos una tabla con los posibles valores de la variable x para determinar cuál es el valor que resuelve nuestro problema.

	2 — 5	5 — $+\infty$
Signo de $A'(x)$	—	+
Monotonía de $A(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

En este caso, no tiene sentido evaluar la función objetivo en x=2 porque no tendríamos hoja alguna. Por tanto, el mínimo se alcanzará en x=5 y el área de la hoja será:

$$A(5) = 5 \cdot \left(\frac{18}{5-2} + 4 \right) = 5 \cdot 10 = 50\ cm^2$$

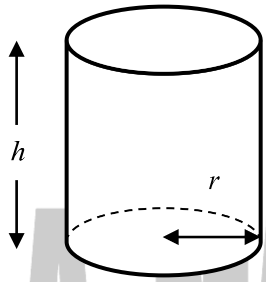
Paso 7: Proporcionar explícitamente la solución del problema.

A la vista de los resultados, vemos que las dimensiones que debe tener la hoja para que sea lo más económica posible son:

$$x = 5\ cm$$
$$y = \frac{18}{5-2} + 4 = 10\ cm$$

14. Se desea construir una lata de conserva en forma de cilindro circular recto de área total 150 cm^2 y **volumen máximo**. Determina su generatriz y su radio.

Paso 1: Realizar una representación gráfica o simbólica.



Paso 2: Identificación de la función objetivo

En este caso, nuestra función objetivo será el volumen del cilindro, el cual deseamos que sea máximo.

Paso 3: Creación de variables.

r: radio (en cm) de la base del cilindro.

h: altura (en cm) del cilindro

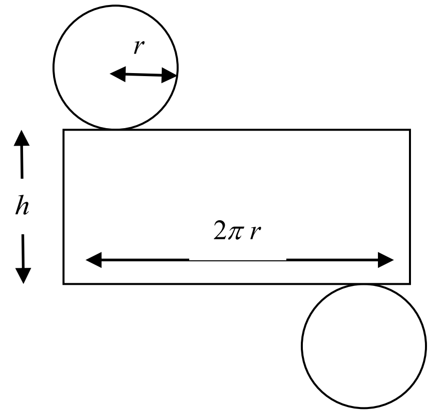
Paso 4: Construcción analítica de la función objetivo.

En este caso, nuestra función objetivo será el volumen del cilindro circular recto, es decir:

$$V(r,h) = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Paso 5: Determinación de la condición de ligadura entre las variables que aparecen en la función objetivo.

En este caso, la condición de ligadura viene determinada por el área del cilindro circular recto. Así pues:



$$2\cdot\pi\cdot r^2+2\cdot\pi\cdot r\cdot h=150$$

Por tanto:

$$2\cdot\pi\cdot r\cdot h=150-2\cdot\pi\cdot r^2$$

$$\Rightarrow\quad h=\frac{150-2\cdot\pi\cdot r^2}{2\cdot\pi\cdot r}$$

Sustituyendo en la función objetivo:

$$V(r,h)=\pi\cdot r^2\cdot h\quad\Rightarrow\quad V(r)=\pi\cdot r^2\cdot\frac{150-2\cdot\pi\cdot r^2}{2\cdot\pi\cdot r}\quad\Rightarrow\quad V(r)=75r-\pi\cdot r^3$$

Paso 6: Ahora que la función objetivo depende de una única variable, **derivamos y calculamos los extremos relativos** (máximos o mínimos)

$$V(r)=75r-\pi\cdot r^3\quad\Rightarrow\quad V'(r)=75-3\cdot\pi\cdot r^2$$

Igualamos a cero la derivada y obtenemos los puntos críticos:

$$V'(r)=75-3\cdot\pi\cdot r^2=0\quad\Rightarrow\quad 3\cdot\pi\cdot r^2=75\quad\Rightarrow\quad r^2=\frac{25}{\pi}\quad\Rightarrow\quad r=\pm\frac{5}{\sqrt{\pi}}$$

Construimos una tabla con los posibles valores de la variable r para determinar cuál es el valor que resuelve nuestro problema.

	0 — $\frac{5}{\sqrt{\pi}}$	$\frac{5}{\sqrt{\pi}}$ — $+\infty$
Signo de $V'(x)$	+	—
Monotonía de $V(x)$	↗	↘

En este caso, no tiene sentido evaluar la función objetivo en r=0 porque no tendríamos cilindro alguno. Por tanto, el máximo se alcanzará en $r = \frac{5}{\sqrt{\pi}}$

Paso 7: Proporcionar explícitamente la solución del problema.

A la vista de los resultados, vemos que para que un cilindro circular recto de área 150 cm2 tenga volumen máximo, su radio debe valer:

$$r = \frac{5}{\sqrt{\pi}}\ cm$$

y su generatriz:

$$h = \frac{150 - 2\cdot\pi\cdot\left(\frac{5}{\sqrt{\pi}}\right)^2}{2\cdot\pi\cdot\frac{5}{\sqrt{\pi}}} = \frac{150-50}{10\cdot\sqrt{\pi}} = \frac{100}{10\cdot\sqrt{\pi}} = \frac{10}{\sqrt{\pi}}\ cm$$

15. El propietario de un edificio tiene alquilados los 40 lujosos pisos del mismo a un precio de 600 € cada uno. Por cada 60€ que el propietario aumenta el precio observa que pierde un inquilino. ¿A qué precio le convienen alquilar los pisos para obtener la **mayor ganancia** posible?

Paso 1: En este caso, no es posible representar gráficamente la situación descrita en el problema por lo que optaremos por realizar una representación simbólica de lo que ocurre con las ganancias del propietario a medida que un inquilino más abandona una de las viviendas disponibles.

Numero de incrementos en el precio	Precio del alquiler	Inquilinos perdidos	Inquilinos alquilados	Ganancias del propietario
0	600	0	40-0=40	$40\cdot 600=24000$
1	$600+60=660$	1	40-1=39	$39\cdot 660=25740$
2	$600+2\cdot 60=720$	2	40-2=38	$38\cdot 720=27360$
3	$600+3\cdot 60=780$	3	40-3=37	$37\cdot 780=28860$

Paso 2: Identificación de la función objetivo

En este caso, nuestra función objetivo serán las ganancias del propietario, las cuales deseamos que sean máximas.

Paso 3: Creación de variables.

Observando la tabla dispuesta en el paso 1, podemos apreciar que las ganancias dependen del número de inquilinos que alquilan, lo cual a su vez depende del número de incrementos que el propietario realiza sobre el precio del piso. Así pues, la variable que necesitamos para poder trabajar y resolver el problema será el número de incrementos que se produzcan en el precio.

x: número de incrementos de 60 euros que el propietario realiza sobre el precio inicial

Paso 4: Construcción analítica de la función objetivo.

Numero de incrementos en el precio	Precio del alquiler	Inquilinos perdidos	Inquilinos alquilados	Ganancias del propietario
0	600	0	40-0=40	$40\cdot 600=24000$
1	$600+60=660$	1	40-1=39	$39\cdot 660=25740$
2	$600+2\cdot 60=720$	2	40-2=38	$38\cdot 720=27360$
3	$600+3\cdot 60=780$	3	40-3=37	$37\cdot 780=28860$
…	…	…	…	…
x	$600+x\cdot 60$	x	40-x	$(40-x)\cdot(600+60x)$

Así pues, la función objetivo, aquella que nos proporcionará las ganancias en función del número de subidas de precio en el alquiler será:

$$G(x)=(40-x)\cdot(600+60x)$$

Paso 5: Dado que la función objetivo depende de una única variable, **derivamos y calculamos los extremos relativos** (máximos o mínimos)

$$\begin{aligned} G(x)=(40-x)\cdot(600+60x) \quad &\Rightarrow \quad G'(x)=-1\cdot(600+60x)+60\cdot(40-x) \\ &\Rightarrow \quad G'(x)=-600-60x+2400-60x \\ &\Rightarrow \quad G'(x)=-120x+1800 \end{aligned}$$

Igualamos a cero la derivada y obtenemos los puntos críticos:

$$G'(x)=-120x+1800=0 \quad \Rightarrow \quad 120x=1800 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1800}{120}=15$$

Construimos una tabla con los posibles valores de la variable x para determinar cuál es el valor que resuelve nuestro problema.

	0 — 15	15 — 40
Signo de $G'(x)$	+	—
Monotonía de $G(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

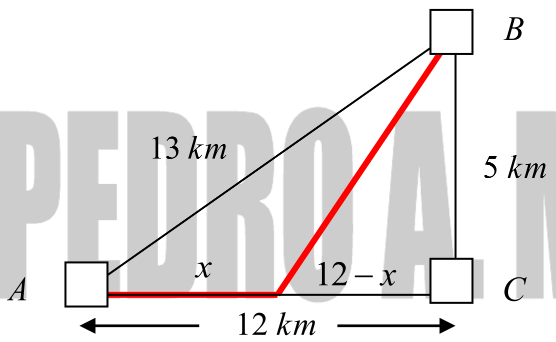
Paso 6: Proporcionar explícitamente la solución del problema.

A la vista de los resultados, vemos que las máximas ganancias se obtienen si subimos el precio del alquiler 15 veces. Ello supone que el precio al que le conviene alquilar cada vivienda es de:

$$P = 600 + 60 \cdot 15 = 1500 \text{ euros.}$$

16. Un barco B y dos ciudades costeras A y C forman un triángulo rectángulo en C. Las distancias del barco a las ciudades A y C son 13 Km y 5 Km, respectivamente. Un hombre situado en A desea llegar hasta el barco B. Sabiendo que puede nadar a 3Km/h y caminar a 5 Km/h, ¿a qué distancia de A debe abandonar la costa para nadar hasta B si quiere **llegar lo antes posible**?

Realicemos primeramente un esbozo o esquema de la situación descrita en el problema. Esto nos ayudará a entender el propósito del mismo y nos permitirá resolverlo con más facilidad:



$$13^2 = 5^2 + d^2$$
$$d = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$$

Tras ello, como podemos apreciar, necesitaremos una única variable para resolver el problema:

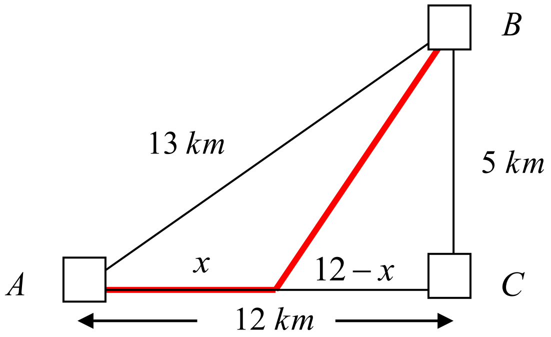
$$x = distancia\ (en\ km)\ desde\ A\ a\ la\ que\ debe\ comenzar\ a\ nadar$$

Dado que el objetivo es minimizar el tiempo empleado por el vehículo en llegar al oasis, necesitaremos construir y optimizar la ***función tiempo***:

- Sabemos que por superficie recorrerá x km a una velocidad de 5 km/h. En consecuencia tardará:

$$T_1(x) = \frac{x}{5} \quad (en\ horas)$$

- Aplicando el Teorema de Pitágoras, podemos averiguar los kilómetros que recorrerá el vehículo por desierto:



$$y^2 = 5^2 + (12-x)^2$$
$$y = \sqrt{5^2 + (12-x)^2}$$
$$y = \sqrt{25 + (12-x)^2}$$

Como la velocidad por desierto es de 60 km/h, el tiempo que tardará en recorrer este tramo será:

$$T_2(x) = \frac{\sqrt{25+(12-x)^2}}{3} \quad (en\ horas)$$

Así pues, sumando ambos tiempos, obtendremos nuestra función objetivo:

$$T(x) = \frac{x}{5} + \frac{\sqrt{25+(12-x)^2}}{3} \quad (en\ horas)$$

Si derivamos la función que acabamos de construir, tenemos que:

$$T'(x) = \frac{1}{5} + \frac{2\cdot(12-x)\cdot(-1)}{3\cdot 2\cdot\sqrt{25+(12-x)^2}} = \frac{1}{5} - \frac{12-x}{3\cdot\sqrt{25+(12-x)^2}}$$

Igualando la derivada a cero obtendremos los puntos críticos de la función tiempo:

$$\frac{1}{5} - \frac{12-x}{3\cdot\sqrt{25+(12-x)^2}} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{5} = \frac{12-x}{3\cdot\sqrt{25+(12-x)^2}} \;\Rightarrow$$

$$3\cdot\sqrt{25+(12-x)^2} = 5\cdot(12-x) \;\Rightarrow\; \left(3\cdot\sqrt{25+(12-x)^2}\right)^2 = (5\cdot(12-x))^2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 9\cdot\left(25+(12-x)^2\right) = 25\cdot(12-x)^2 \;\Rightarrow\; 225 + 9\,(12-x)^2 = 25\cdot(12-x)^2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 225 = 25\cdot(12-x)^2 - 9\,(12-x)^2 \;\Rightarrow\; 225 = 16\cdot(12-x)^2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; (12-x)^2 = \frac{225}{16} \;\Rightarrow\; 12-x = \sqrt{\frac{225}{16}} \;\Rightarrow\; 12-x = \pm\frac{15}{4} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = 8.25 \\ x = -15.75 \end{cases}$$

La solución negativa la descartaremos por no tener sentido en el contexto del problema que trabajamos. Comprobaremos ahora que la otra solución se corresponde con un mínimo de la función tiempo:

	0 — 8.25	8.25 — 12
Signo de T'(x)	-	+
Monotonía de T(x)	↘	↗

Así pues, para que la persona que sale de la ciudad A tarde lo menos posible en llegar al barco B deberá abandonar tierra en el Km 8.25 y ponerse a nadar desde ese punto.

17. En el plano *XY* está dibujada una parcela *A* cuyos límites son dos calles de ecuaciones $x = 0$ y $x = 40$, respectivamente, una carretera de ecuación $y = 0$, y el tramo del curso de un río de ecuación:

$$y = f(x) = 30 \cdot \sqrt{2x+1} \text{ , con } 0 \le x \le 40$$

Se pretende urbanizar un rectángulo *R* inscrito en la parcela *A* , de manera que los vértices de *R* sean los puntos $(x, 0)$, $(x, f(x))$, $(40, f(x))$ y $(40, 0)$

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

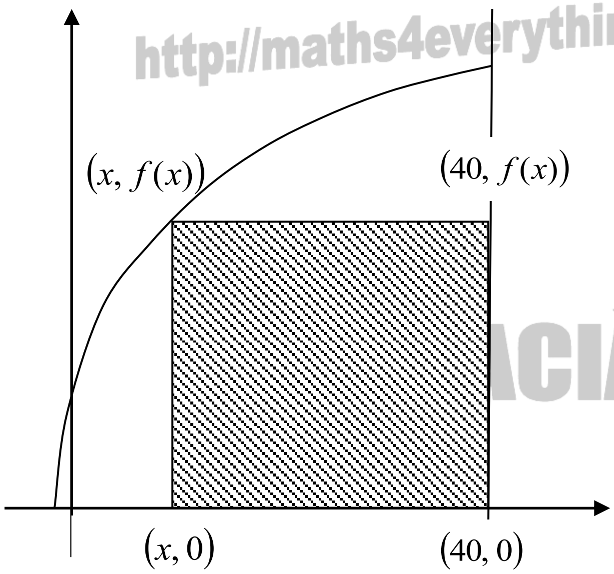
a) El área de la parcela *R* .

b) Los vértices del rectángulo *R* al que corresponde área máxima.

c) El valor de dicha **área máxima**.

a) Previamente realizaremos una representación gráfica de la situación descrita:

Para la representación gráfica necesitamos conocer algunas de las propiedades y características básicas de la función $f(x) = 30 \cdot \sqrt{2x+1}$.



<u>DOMINIO</u>: $Dom_{f(x)} = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

$$f(x) = 30 \cdot \sqrt{2x+1} \quad \Rightarrow \quad 2x+1 \ge 0 \quad \Rightarrow \quad x \ge -\frac{1}{2}$$

<u>CORTES CON LOS EJES</u>:

$$Eje\ Y : x = 0 \quad \Rightarrow f(0) = 30 \cdot \sqrt{2 \cdot 0 + 1} = 30$$
$$\Rightarrow \quad P_1(0,30)$$
$$Eje\ X : y = 0 \quad \Rightarrow 0 = 30 \cdot \sqrt{2x+1}$$
$$\Rightarrow \quad 2x+1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \quad P_2\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

A la vista de la gráfica, vemos que: $A(x) = base \cdot altura = (40 - x) \cdot f(x)$

$$A(x) = 30 \cdot (40 - x) \cdot \sqrt{2x+1}$$

b) A continuación debemos derivar la función del área obtenida en el apartado anterior y obtener los puntos críticos.

$$A(x)=30\cdot(40-x)\cdot\sqrt{2x+1} \quad \Rightarrow \quad A'(x)=30\cdot\left[-\sqrt{2x+1}+\frac{(40-x)\cdot 2}{2\cdot\sqrt{2x+1}}\right]$$

$$\Rightarrow \quad A'(x)=30\cdot\frac{-2x-1+40-x}{\sqrt{2x+1}}=30\cdot\frac{39-3x}{\sqrt{2x+1}}$$

Igualamos la derivada a cero y resolvemos:

$$A'(x)=30\cdot\frac{39-3x}{\sqrt{2x+1}}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{39-3x}{\sqrt{2x+1}}=0 \quad \Rightarrow \quad 39-3x=0 \quad \Rightarrow \quad x=13$$

Analizamos la condición del punto crítico obtenido:

	0 — 13	13 — 40
Signo de $A'(x)$	+	—
Monotonía de $A(x)$	↗	↘

Por tanto el máximo se alcanza para x=13. Así pues, los vértices que delimitan la parcela de área máxima serán:

$$(13,0) \qquad \left(13,\, 30\cdot\sqrt{27}\right) \qquad \left(40,\, 30\cdot\sqrt{27}\right) \qquad (40,\, 0)$$

c) El valor del área máxima se calcula sustituyendo el máximo obtenido en la función objetivo que nos proporciona el área de la parcela:

$$A(13)=30\cdot(40-13)\cdot\sqrt{2\cdot 13+1}=4208.88 \quad u^2$$