SOLUCIONES

DOSSIER SEMANAL 09

MATEMÁTICAS II

Por Pedro A. Martínez

PROBLEMA 1: Considera las coordenadas de los siguientes puntos y contesta razonadamente a cada una de las siguientes cuestiones:

$$A(-2,1,1) \qquad B(0,1,3) \qquad C(-2,3,-3) \qquad D(1,1,-4)$$

a) Calcula las coordenadas de un vector **unitario** paralelo a $\overrightarrow{AB}$.
b) Calcula las coordenadas de un **vector perpendicular** a los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.
c) Calcula el **área del triángulo** delimitado por los vértices A, B y C
d) Calcula el **volumen del tetraedro** delimitado por los vértices A, B, C y D.
e) Calcula la **ecuación implícita del plano** π que pasa por los puntos A, B y C
f) ¿Son **coplanarios** los puntos A, B, C y D?
g) Calcula la **ecuación de la recta** r que pasa por C y el origen de coordenadas

a) Primeramente, obtenemos las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (0,1,3) - (-2,1,1) = (2,0,2)$$

Comprobemos ahora si es unitario. Para ello hemos de ver si su módulo es uno:

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{2^2+0^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Dado que no es unitario, lo único que deberemos hacer para obtener un vector paralelo de módulo 1 es dividir el vector entre el valor de su módulo:

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \left(\frac{2}{2\sqrt{2}}, \frac{0}{2\sqrt{2}}, \frac{2}{2\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

b) Sabemos que las coordenadas de los vectores dados son:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (2,0,2)$$
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (-2,3,-3) - (-2,1,1) = (0,2,-4)$$

Para obtener un vector perpendicular a los dos que nos proporcionan, deberemos simplemente realizar el producto vectorial de ambos. En este caso, dado que sólo nos interesa la condición de perpendicularidad, podemos considerar vectores paralelos a $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ para así simplificar cálculos:

$$\overrightarrow{AB} = (2,0,2) \parallel (1,0,1)$$
$$\overrightarrow{AC} = (0,2,-4) \parallel (0,1,-2)$$

Así pues, el vector que buscamos será:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k} = (-1,2,1)$$

c) Sabemos que el área de un triángulo determinado por tres puntos equivale a la mitad del módulo del producto vectorial de dos de los vectores ($\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$) que se generan con los tres puntos. Así pues:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -4\vec{\imath} + 8\vec{\jmath} + 4\vec{k} = (-4, 8, 4)$$

Por tanto, el área del triángulo ABC será:

$$A_{ABC} = \frac{\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right\|}{2} = \frac{\sqrt{(-4)^2 + 8^2 + 4^2}}{2} = \frac{\sqrt{96}}{2} = \frac{4\sqrt{6}}{2} = 2\sqrt{6}\ u^2$$

d) El volumen del tetraedro pedido equivale a una sexta parte del volumen del paralelepípedo que determinan los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$. Este volumen puede obtenerse mediante el valor absoluto de su producto mixto:

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right] = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -32$$

Así pues, el volumen del tetraedro ABCD será:

$$V_{ABCD} = \left|\frac{\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]}{6}\right| = \frac{32}{6} = \frac{16}{3}\ u^3$$

e) Para escribir la ecuación del plano necesitamos un punto y dos vectores directores del plano, o bien, un punto y un vector normal. En este caso, disponemos de los elementos necesarios para optar por cualquiera de las dos opciones ya que en el apartado b) de este problema, calculamos un vector perpendicular a los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ que son directores del plano. Por tanto, escribiremos la ecuación del plano haciendo uso del vector normal $\vec{v} = \vec{n} = (-1, 2, 1)$. Así pues, su ecuación implícita tendrá la forma:

$$\vec{n} = (-1, 2, 1) \quad \to \quad \pi:\ -x + 2y + z + D = 0$$

Para obtener el valor del término independiente, sustituiremos las coordenadas de un punto del plano:

$$B(0, 1, 3) \in \pi \quad \to \quad -0 + 2 \cdot 1 + 3 + D = 0 \quad \to \quad D = -5$$

Así pues, la ecuación implícita del plano pedido es:

$$\pi:\ -x + 2y + z - 5 = 0$$

f) Para ello simplemente hemos de ver si los tres vectores que podemos generar con ellos son linealmente dependientes. Dado que en el apartado d) vimos que:

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -32 \neq 0$$

Como el determinante es distinto de cero, podemos asegurar que los tres vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ son linealmente independientes y por lo tanto, **no son coplanarios**, no están contenidos en un plano común.

g) Para escribir la ecuación de la recta, necesitamos un punto y un vector director. En este caso, como punto consideraremos el origen de coordenadas $O(0,0,0)$, y como vector director el vector $\overrightarrow{OC} = (-2,3,-3)$. Así pues, la ecuación paramétrica de la recta será:

$$\begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -3\lambda \end{cases} \quad con\ \lambda \in \mathbb{R}$$

PROBLEMA 2: Considera las ecuaciones de la recta r y el plano π :

$$r: \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ -3y + z = 0 \end{cases} \qquad \pi: \ 2x - y - z - 6 = 0$$

a) Tanto para la recta como para el plano, calcula las coordenadas de: un **punto**, **dos vectores directores** y un vector **normal**.

b) Determina la **posición relativa** del plano π y la recta r. Si resultan ser secantes, calcula las coordenadas del **punto de intersección**.

c) Calcula la **ecuación implícita del plano** perpendicular a la recta r que pasa por el punto $P(1,1,2)$

d) Calcula la **ecuación continua de la recta** que es perpendicular al plano π y pasa por el origen de coordenadas.

e) Calcula la **ecuación implícita del plano** paralelo a π que pasa por el punto P.

a) Comenzaremos por la recta r. Para poder extraer la información que nos piden de forma rápida, pasaremos la ecuación como intersección de dos planos a la ecuación paramétrica:

$$r: \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ -3y + z = 0 \end{cases} \rightarrow \quad y = \lambda \rightarrow \quad r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 3\lambda \end{cases} \quad con\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Así pues, ahora podemos obtener fácilmente un punto M y un vector director $\vec{u}$:

$$M(2,0,0) \qquad \vec{u} = (1,1,3)$$

Otro vector será un vector proporcional al obtenido, por ejemplo:

$$\vec{u} = (1,1,3) \parallel (2,2,6)$$

Y un vector normal (de los infinitos que tiene una recta) será, por ejemplo:

$$(a,b,c)\cdot(1,1,3) = 0 \quad \rightarrow \quad a+b+3c = 0 \quad \rightarrow \quad a=1 \quad b=-1 \quad c=0 \quad \rightarrow \quad (1,-1,0)$$

En el caso del plano, dado que disponemos de su ecuación implícita, ya podemos averiguar fácilmente su vector normal:

$$\vec{n} = (2,-1,-1)$$

Para obtener la información restante, transformaremos su ecuación implícita en paramétrica:

$$\pi:\ 2x-y-z-6=0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x=\alpha \\ y=\beta \end{cases} \rightarrow \quad \pi: \begin{cases} x=\alpha \\ y=\beta \\ z=-6+2\alpha-\beta \end{cases} \qquad con\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}$$

Así pues, un punto N y dos vectores directores del plano serán:

$$N(0,0,-6) \qquad \vec{v} = (1,0,2) \qquad \vec{w} = (0,1,-1)$$

b) Teniendo la información del apartado a), es fácil comprobar que:

$$\vec{u}\cdot\vec{n} = (1,1,3)\cdot(2,-1,-1) = 2-1-3 = -2 \neq 0$$

Por tanto, el plano y la recta son secantes. Para calcular el punto de intersección resolveremos el sistema generado por sus ecuaciones. El trabajo se facilita si consideramos la ecuación implícita del plano y la paramétrica de la recta:

$$\pi:\ 2x-y-z-6=0 \qquad r: \begin{cases} x=2+\lambda \\ y=\lambda \\ z=3\lambda \end{cases}$$

Así pues:

$$2x - y - z - 6 = 0 \quad \rightarrow \quad 2 \cdot (2 + \lambda) - \lambda - 3\lambda - 6 = 0 \rightarrow \quad -2\lambda - 2 = 0 \rightarrow \quad \lambda = -1$$

Conocido el valor concreto de λ, podemos sustituir en la ecuación de la recta y averiguar el punto A de intersección entre la recta y el plano:

$$\begin{cases} x = 2 + (-1) \\ y = -1 \\ z = 3 \cdot (-1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = -3 \end{cases} \rightarrow \quad A(1, -1, -3)$$

c) Dado que el plano que nos piden es perpendicular a la recta r, el vector director de esta última será el vector normal del plano. Por tanto:

$$\vec{u} = (1, 1, 3) \quad \rightarrow \quad x + y + 3z + D = 0$$

Para averiguar el valor del término independiente, sustituimos el punto $P(1, 1, 2)$ en la ecuación del plano buscado:

$$1 + 1 + 3 \cdot 2 + D = 0 \quad \rightarrow \quad D = -8$$

Por tanto, la ecuación implícita del plano que nos piden será:

$$x + y + 3z - 8 = 0$$

d) Dado que la recta que nos piden es perpendicular al plano, el vector director de la recta será el vector normal del plano. Como pasa por el origen de coordenadas, la ecuación continua de la recta que nos piden será:

$$Normal\ del\ plano: (2, -1, -1) \quad \rightarrow \quad \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-1}$$

e) Dado que el plano que nos piden es paralelo al plano π, ambos planos tendrán los mismos coeficientes en su ecuación implícita.

$$2x - y - z + D = 0$$

Sustituimos en la ecuación las coordenadas del punto P para poder averiguar el término independiente:

$$2 \cdot 1 - 1 - 2 + D = 0 \quad \rightarrow \quad D = 1$$

Así pues, la ecuación implícita del plano que nos piden será:

$$2x - y - z + 1 = 0$$