Lea todo el prospecto detenidamente antes de empezar a realizar la hoja de repaso.

- *Conserve este prospecto. Puede tener que volver a leerlo.*
- *Si tiene alguna duda, consulte a su profesor o amigo/a que siempre saca buena nota.*
- *Esta hoja de repaso se le ha recetado a Vd. personalmente y no debe darla a otras personas. Puede perjudicarles, aun cuando sus síntomas sean los mismos que los suyos*

Composición por cada 100 mg:

- *10 mg de* ***operaciones con vectores en el espacio***
- *12 mg de* ***cálculo de ecuaciones de rectas y planos***
- *10 mg de* ***cálculo de posiciones relativas***
- *10 mg de* ***cálculo de distancias***
- *15 mg de* ***cálculo de ángulos***
- *10 mg de* ***cálculo de puntos simétricos***
- *20 mg de* ***cálculo de áreas y volúmenes***
- *8 mg de* ***cálculo de intersecciones***
- *5 mg de* ***cálculo de proyecciones***

Titular y fabricante: *Dr. Pedro A. Martínez*

Antes de tomar "Repaso de Geometría Analítica". No realice este repaso si...:

- *Si no está cursando Matemáticas II de 2º Bachillerato en el IES Macià Abela.*
- *Si no ha dedicado tiempo a elaborar un esquema o resumen que le ayude a estudiar el contenido de la asignatura.*
- *Si usted no ha practicado antes lo suficiente con ejercicios similares realizados en clase.*
- *Si padece nerviosismo extremo cuando no le sale un problema.*
- *Si no ha dormido bien y se siente agotado y/o agobiado.*

Dosis recomendada:

- *3 problemas diarios durante 6 días.*

Efectos secundarios:

- *Debe saber que si realiza este repaso puede sufrir un aumento de su conocimiento y habilidades matemáticas*
- *También podría ganar herramientas y técnicas para enfrentarse a dificultades matemáticas.*

Toma de otros medicamentos:

- *Este producto no es incompatible con la realización de otros ejercicios similares. De hecho, el "Repaso de Geometría Analítica" es más efectivo acompañado de otros repasos y/o* ***actividades trabajadas en clase con similar composición****.*

Advertencias:

- *Esta hoja de repaso no es apta para niños*
- *Después de realizar estos ejercicios se aconseja no trabajar con maquinaria pesada, conducir o realizar cualquier actividad de riesgo.*
- *Si usted toma más "Repaso de Geometría Analítica" del que debiera contacte urgentemente con su profesor:* ***maths4everything@gmail.com***

1. Dados los vectores $\vec{u}=(1,2,3)$, $\vec{v}=(2,0,1)$ y $\vec{w}=(-1,3,0)$, se pide::
   a) Determinar todos los posibles productos **escalares**.
   b) Determinar todos los posibles productos **vectoriales**.
   c) **Calcular** $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ y $[\vec{v},\vec{w},\vec{u}]$.
   d) Calcular el **módulo** de los tres vectores
   e) Calcular el **ángulo** que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{w}$.
   f) Determinar la **familia de vectores perpendiculares** a $\vec{v}$

2. Determina los valores reales x e y para que el vector $(x,y,1)$ sea **ortogonal** a los vectores $(3,2,0)$ y $(2,1,-1)$

3. Dados los vectores $\vec{u}=(2,-3,5)$ y $\vec{v}=(6,-1,0)$, se pide:
   a) Determinar el valor de m para que el vector $\vec{w}=(m,2,3)$ sea **perpendicular** a $\vec{u}$
   b) Calcular el **área** del paralelogramo determinado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$
   c) Calcular el **volumen** del paralelepípedo generado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$

4. Dados los puntos $A=(1,1,0)$, $B=(2,-2,3)$ y $C=(0,4,-1)$ y los vectores $\vec{u}=(3,1,4)$, $\vec{v}=(1,-1,2)$ y $\vec{w}=(1,1,-1)$, se pide **determinar**:
   a) Las ecuaciones del plano que pasa por los puntos A, B y C
   b) Las ecuaciones del plano que pasa por A y tiene como vectores directores a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$
   c) Las ecuaciones del plano que pasa por B y tiene a $\vec{w}$ como vector normal
   d) Las ecuaciones del plano que pasa por el origen de coordenadas y tiene como vector perpendicular el vector $\vec{AC}$
   e) Las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos B y C
   f) Las ecuaciones de la recta que pasa por A y tiene a $\vec{w}$ como vector director

g) Las ecuaciones de la recta que pasa por el origen de coordenadas y tiene como vectores perpendiculares a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$

5. De las siguientes ecuaciones se pide determinar si representa una recta o un plano en el espacio y extraer, en cada caso, un **punto**, dos vectores **directores** y un vector **normal**.

a) $(x,y,z)=(2,1,3)+\lambda\cdot(1,0,1)$

b) $3x+5y-z+1=0$

c) $\left.\begin{array}{l} x-y+z-7=0 \\ x+y=1 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{l} x=-1+\lambda \\ y=2\lambda \\ z=3+8\lambda \end{array}\right\}$

e) $\dfrac{x-1}{2}=y=z-1$

f) $\left.\begin{array}{l} x-2y+5z-1=0 \\ 2x+3y-z+2=0 \end{array}\right\}$

g) $\left.\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=-6 \\ z=-1-\lambda \end{array}\right\}$

h) $\dfrac{x}{-1}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1$

i) $\left.\begin{array}{l} x=1+\lambda-\mu \\ y=7+2\lambda-\mu \\ z=1+\lambda-3\mu \end{array}\right\}$

j) $\left.\begin{array}{l} x-z=2 \\ x-y-5z=0 \end{array}\right\}$

k) $-x+z=1$

l) $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{1-y}{2}=\dfrac{z+5}{1}$

m) $(x,y,z)=(-1,3,-5)+\lambda\cdot(2,5,4)$

n) $\left.\begin{array}{l} x=2-\mu \\ y=\mu \\ z=1-3\lambda \end{array}\right\}$

o) $(x,y,z)=\lambda\cdot(0,0,1)+\mu\cdot\left(8,\dfrac{1}{2},3\right)$

p) $(x,y,z)=(0,0,2)+\lambda\cdot(-2,1,6)+\mu\cdot(0,1,0)$

6. **Determina**, en cada caso, **la ecuación del plano** que:

a) Pasa por el punto $A=(1,2,1)$ y es paralelo al plano $x-2y+5z-1=0$

b) Pasa por el punto $B=(-1,1,0)$ y es perpendicular a la recta $\left.\begin{array}{l} x-z-y=0 \\ x+y=1 \end{array}\right\}$

c) Contiene a la recta $\begin{cases} x-2y-z=0 \\ 2x+y+5z=-2 \end{cases}$ y es paralelo a la recta $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+8}{4}$

d) Es perpendicular al eje Z y pasa por el punto de corte de las rectas $x-1=y-2=\dfrac{z-1}{2}$ y $\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$

7. **Halla**, en cada caso, **la ecuación de la recta** que:

a) Pasa por el punto $A=(1,2,1)$ y es paralela a la recta $x-1=\dfrac{y}{2}=2-z$

b) Pasa por el punto $B=(-1,1,0)$ y es perpendicular al plano $x-2y+5z-1=0$

c) Pasa por el punto B y es paralela a los planos $x-2y+5z-1=0$ y $2x+3y-z+2=0$

d) Pasa por el origen y se apoya en las rectas $x=-y=\dfrac{z+1}{2}$ y $\begin{cases} x=2-2\lambda \\ y=\lambda \\ z=3-5\lambda \end{cases}$

8. Discute la **posición relativa** de los siguientes **pares de planos**:

a)	$\pi_1 \equiv 2x-y+4z=1$ $\pi_2 \equiv -x-y+4z=1$	b)	$\pi_1 \equiv 20x-5y+10z=0$ $\pi_2 \equiv -2x+\dfrac{y}{2}-z=1$	c)	$\pi_1 \equiv x-y+z=1$ $\pi_2 \equiv \begin{cases} x=1+2\lambda-\mu \\ y=2\lambda \\ z=\mu \end{cases}$

9. Discute la **posición relativa** de los siguientes **planos**:

a)	$\pi_1 \equiv x+y-z+3=0$ $\pi_2 \equiv -4x+y+4z=7$ $\pi_3 \equiv -2x+3y+2z=2$	b)	$\pi_1 \equiv 2x-3y+4z=1$ $\pi_2 \equiv x-y-z+1=0$ $\pi_3 \equiv -x+2y-z+2=0$

c)	$\pi_1 \equiv 2x+3y+z-1=0$ $\pi_2 \equiv x-y+z+2=0$ $\pi_3 \equiv 2x-2y+2z+4=0$	d)	$\pi_1 \equiv 2x-y-4z=2$ $\pi_2 \equiv x+y+z+1=0$ $\pi_3 \equiv x-2y-5z=3$
e)	$\pi_1 \equiv 7x+z+1=0$ $\pi_2 \equiv -x+y+2z=7$ $\pi_3 \equiv 2x-2y-4z=5$	f)	$\pi_1 \equiv 2x-y+2z+1=0$ $\pi_2 \equiv -4x+2y-4z-2=0$ $\pi_3 \equiv 6x-3y+6z+1=0$
g)	$\pi_1 \equiv x-y+2z+1=0$ $\pi_2 \equiv \begin{cases} x=1+\lambda-2\mu \\ y=2+\lambda \\ z=-7+\mu \end{cases}$ $\pi_3 \equiv \begin{cases} x=3+\lambda+\mu \\ y=-5+\lambda \\ z=-\dfrac{\mu}{2} \end{cases}$	h)	$\pi_1 \equiv 5x+y-3z+7=0$ $\pi_2 \equiv \begin{cases} x=10+\lambda \\ y=33-5\lambda+3\mu \\ z=30+\mu \end{cases}$ $\pi_3 \equiv \begin{cases} x=3+5\lambda \\ y=-7-25\lambda-3\mu \\ z=5-\mu \end{cases}$

10. Discute la **posición relativa** de las siguientes **rectas**:

a)	$r_1 \equiv \dfrac{x-1}{2}=y=z-1$ $r_2 \equiv x=-y=-z$	b)	$r_1 \equiv \dfrac{x-1}{2}=y-1=\dfrac{z-1}{3}$ $r_2 \equiv \begin{cases} x+y+z-3=0 \\ 2x-y+z-2=0 \end{cases}$
c)	$r_1 \equiv \begin{cases} x+2y+z+1=0 \\ 2x+5y+7z-2=0 \end{cases}$ $r_2 \equiv \begin{cases} x+y-4z+5=0 \\ 3x+5y-2z+7=0 \end{cases}$	d)	$r_1 \equiv \begin{cases} x+y+z-5=0 \\ x+2y-z=0 \end{cases}$ $r_2 \equiv \begin{cases} x=1-3\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}$

11. Discute la **posición relativa** de los siguientes pares **recta-plano**:

a)	$r \equiv \dfrac{x+1}{2}=y=-z$ $\pi \equiv x-2y+3z+1=0$	b)	$r \equiv \dfrac{x-1}{5}=y=z+2$ $\pi \equiv \begin{cases} x=5+3\lambda+2\mu \\ y=\lambda \\ z=\mu \end{cases}$	c)	$r \equiv \begin{cases} 3x+y+z-5=0 \\ x+2y-z+2=0 \end{cases}$ $\pi \equiv x-3y+3z=9$

12. **Calcula** el valor del parámetro real k para que los planos $\pi_1 \equiv x+y+z=2$ $\pi_2 \equiv 2x+3y+z=3$, $\pi_3 \equiv kx+10y+4z=11$ **tengan una recta en común**.

13. Determina la **posición relativa** de los siguientes juegos de rectas y planos en función del parámetro real k:

a)	$r \equiv \begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x-y+z=2 \end{cases}$ $\pi \equiv kx-y+2z=4$	b)	$\pi_1 \equiv kx+y+z=1$ $\pi_2 \equiv x+ky+z=k$ $\pi_3 \equiv kx+y+kz=k$

14. Averigua para qué valores del parámetro real m, las siguientes rectas resultan ser **secantes**. Para dicho valor de m calcula el **punto de intersección** entre ambas

$$r \equiv \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-4}{3} \qquad s \equiv \begin{cases} x+2y+z-m=0 \\ 2x-y-z+2=0 \end{cases}$$

15. Considera los puntos $A=(1,2,0)$ y $B=(0,3,1)$ la recta r y el plano π dados por las ecuaciones:

$$r \equiv \frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{4-z}{5} \qquad \pi \equiv 8x-7y+2z=3$$

Se pide calcular:

a) La **distancia** entre los puntos A y B
b) La **distancia** entre el punto A y la recta r
c) La **distancia** entre el punto B y el plano π.
d) La **distancia** entre la recta r y el plano π.
e) El **ángulo** que forman la recta r y el plano π.
f) La **distancia y ángulo** entre la recta r y la recta que pasa por A y B.
g) El **ángulo** que forma el plano π con el plano que contiene a la recta r y que pasa por el punto A.

16. Dados los puntos $A=(1,2,-2)$, $B=(1,0,0)$, $C=(1,1,0)$ y $D=(5,0,-1)$, determina:

a) Un **vector ortonormal** a los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

b) El **área** del triángulo ABC.

c) El **volumen** del tetraedro ABCD.

17. Dada la recta y el plano de ecuaciones:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{1-y}{2} = z \qquad \pi \equiv x + ky + z = 1$$

Se pide determinar:

a) El valor del parámetro real k para que el plano y la recta sea **secantes**

b) El punto A de **intersección** entre la recta y el plano para el valor de k obtenido en el apartado anterior

c) La recta **perpendicular** al plano que pasa por el punto de intersección A

d) Las coordenadas del punto **simétrico** B del origen respecto al plano

e) Las coordenadas del punto **simétrico** C del origen respecto a la recta

f) La **ecuación de la recta** s que pasa por B y C

g) La **posición relativa y ángulo** entre las rectas r y s.

18. Considera el triángulo cuyos vértices vienen dados por los puntos de coordenadas $A=(4,-1,3)$, $B=(2,5,8)$ y $C=(5,-1,6)$. Determina las coordenadas de su **baricentro y ortocentro**. Calcula también el **área** del triángulo.

19. Dados los vectores

$$\vec{u}=(-1,2,-3) \qquad \vec{v}=(a,8,2) \qquad \vec{w}=(1,-1,b) \qquad \vec{n}=(0,-23,8)$$

Se pide determinar los valores de los **parámetros** reales a y b para que los vectores $\vec{u},\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean **perpendiculares** dos a dos. Para dichos valores de a y b, se pide:

a) Expresar el vector $\vec{n}$ como **combinación lineal** de los otros tres vectores.

b) Obtener un vector paralelo a $\vec{u}$ que sea unitario.

c) Determinar el plano que pasa por el origen de coordenadas y tiene a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ como vectores directores.

d) Determinar el plano que pasa por el punto $A=(1,1,0)$ y tiene al vector $\vec{n}$ como vector normal.

e) Determinar el ángulo que forman los planos obtenidos en los dos últimos apartados

20. Halla la **distancia** entre los planos:

$$\pi_1 \equiv 3x+y+z-3=0 \qquad \pi_2 \equiv 3x+y+z-8=0$$

21. Halla la **distancia** entre las rectas:

$$r_1 \equiv \begin{cases} y=0 \\ x+z=0 \end{cases} \qquad r_2 \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases}$$

22. Halla la **ecuación del plano** que dista $\sqrt{5}$ unidades del punto $P=(4,3,1)$ y es perpendicular a la recta $r_1 \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=2z \end{cases}$

23. Halla el **volumen del tetraedro** cuyos vértices son el punto y los puntos de intersección donde el plano $\pi \equiv 2x+3y+z-12=0$ corta a los ejes de coordenadas.

24. **Considérense los puntos** $A=(1,2,1)$ y $B=(1,1,0)$. **Determina**, en cada caso, la ecuación del **objeto geométrico** requerido:

a) Ecuación general del plano que pasa por el punto A y es paralelo al plano $x-2y+5z-1=0$

b) Ecuación general del plano que contiene a la recta $\begin{cases} x-2y-z=0 \\ 2x+y+5z=-2 \end{cases}$ y es paralelo a la recta $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+8}{4}$

c) Ecuación paramétrica del plano que es perpendicular al eje Z y pasa por el punto de corte de las rectas $x-1=y-2=\dfrac{z-1}{2}$ y $\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$

d) Ecuación de la recta (como intersección de dos planos) que pasa por el punto A y es paralela a la recta $x-1=\dfrac{y}{2}=2-z$

e) Ecuación continua de la recta que pasa por el punto B y es paralela a los planos $x-2y+5z-1=0$ y $2x+3y-z+2=0$

25. Determina la **posición relativa** la siguiente recta y plano en función del parámetro real a:

$$r \equiv \frac{x-1}{4}=\frac{y}{a}=\frac{z-1}{a} \qquad\qquad \pi \equiv x-y-z=2$$

A continuación, suponiendo que $a=1$ contesta a las siguientes preguntas de forma razonada:

a) Expresa el plano π en su **ecuación paramétrica**

b) Determina un vector **ortonormal** a la recta r.

c) Determina A, el punto de **intersección** entre el plano π y la recta r.

d) Escribe la **ecuación general** del plano π' que pasa por A y es perpendicular a la recta r

e) Determina B, el **punto simétrico** de B'=(1,1,0) con respecto a la recta r

f) Escribe como intersección de dos planos la recta s que pasa por los puntos A y B

g) Calcula la **distancia** de B al plano π

h) Escribe la ecuación de la recta que pasa por B y se **apoya** en las rectas r y r' siendo $r': x=y=z$

i) Determina el **volumen del tetraedro** formado por O, A, B y B'

26. Determina la **posición relativa** de las rectas siguientes en función del parámetro real a :

$$r:\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{a}=\frac{1-z}{2} \qquad s:(x,y,z)=(0,-1,1)+\lambda\cdot(-2,a,2)$$

siendo $\lambda \in R$. A continuación, suponiendo que $a=1$ contesta a las siguientes preguntas de forma razonada:

a) Determina la ecuación de la **perpendicular común** a las rectas r y s.

b) Calcula la **distancia** entre las rectas r y s.

c) Determina el **ángulo** que forman las rectas r y s.

d) Dado el punto A(4,3,1) , determina las coordenadas de su **proyección** sobre la recta r.

e) Halla la ecuación de un plano que **dista** 7 unidades del punto A y es **perpendicular** a la recta s. ¿Cuántos planos hay que cumplen dicha condición?

27. Determina la **posición relativa** de los tres planos siguientes en función del parámetro real a:

$$\pi_1 \equiv ax+2y-z=2a \qquad \pi_2 \equiv x+ay=2a+1 \qquad \pi_3 \equiv ax-2y+z=-2$$

A continuación, suponiendo que $a=1$ contesta a las siguientes preguntas de forma razonada:

a) Expresa el plano π_3 en su **ecuación paramétrica**

b) Determina un vector **ortonormal** al plano π_1

c) Determina A, el punto de **intersección** de los tres planos.

d) Escribe la **ecuación continua** de la recta r que pasa por A y es perpendicular a π_3

e) Determina B, el **punto simétrico** de B'=(-2,-2,-2) respecto al plano π_1

f) Escribe como intersección de dos planos la recta s que pasa por los puntos A y B

g) Calcula la recta que resulta de **proyectar** r sobre el plano π_2

h) Calcula el **ángulo** que forman las rectas r y s

i) Determina el **área del triángulo** OAB