SOLUCIONES

DOSSIER SEMANAL 9

MATEMÁTICAS II

Por Pedro A. Martínez

PROBLEMA 1: Enuncia el teorema de Lagrange. Tras ello, determina los valores de los parámetros reales a y b para que pueda aplicarse el Teorema de Lagrange a la función $f(x)$ en el intervalo $[2, 6]$. ¿En qué punto se verifica la tesis?

$$f(x) = \begin{cases} ax-3 & x<4 \\ -x^2+10x-b & x \geq 4 \end{cases}$$

Enunciaremos primeramente el Teorema de Lagrange (valor medio) para dejar constancia de sus premisas y su tesis o conclusión:

Sea una función $f(x)$ definida en $[a, b]$ que verifica las siguientes condiciones:

- $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$
- $f(x)$ es una función derivable en el intervalo abierto (a, b)

Entonces existe un punto c interior del intervalo (a, b) donde la derivada de la función coincide con la pendiente de la recta que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, expresándolo matemáticamente:

$$\exists c \in (a,b) \left| \; f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \right.$$

Así pues, **vamos ahora a calcular el valor de los parámetros reales a, b y c para que se cumplan las tres premisas del Teorema de Lagrange**. Como puede comprobarse fácilmente, el dominio de la función propuesta en este caso es R. Obsérvese que en ambos tramos la función es un polinomio y en consecuencia no presenta problemas de definición.

La función $f(x)$ debe ser <u>**continua**</u> en el intervalo $[2, 6]$. Observamos que:

- Para $x<4$: la función $f(x) = ax-3$ es continua en R por ser un polinomio. En particular, será continua en $x<4$.

- Para $x > 4$: la función $f(x) = -x^2 + 10x - b$ es continua en R. Así pues, en particular será continua en $x > 4$.

Por tanto, el único punto en el que debemos prestar especial detalle para la continuidad es en el punto de cambio $x = 4$.

$$\left.\begin{array}{l} f(4) = -4^2 + 10 \cdot 4 - b = 24 - b \\ \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^+} -x^2 + 10x - b = 24 - b \\ \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^-} ax - 3 = 4a - 3 \end{array}\right\} \Rightarrow 24 - b = 4a - 3 \quad \Rightarrow \quad 4a + b = 27$$

Para que la función $f(x)$ sea continua en $[2, 6]$, debe cumplirse que $4a + b = 27$.

Ahora bien, la función $f(x)$ también debe ser **derivable** $(2, 6)$:

- Para $x < 4$: la función $f(x) = ax - 3$ que es derivable en R por ser un polinomio. En particular, será derivable en $x < 4$.
- Para $x > 4$: la función $f(x) = -x^2 + 10x - b$ es derivable en R por ser un polinomio. Así pues, en particular será derivable en $x > 4$.

Por tanto, el único punto en el que debemos prestar especial detalle para la derivabilidad es en el punto de cambio $x = 4$.

$$f(x) = \begin{cases} ax - 3 & x < 4 \\ -x^2 + 10x - b & x \geq 4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \begin{cases} a & x < 4 \\ -2x + 10 & x \geq 4 \end{cases}$$

Las derivadas laterales en $x = 4$ deben coincidir para asegurar la derivabilidad de $f(x)$ en el intervalo abierto $(2, 6)$. Es decir:

$$\left.\begin{array}{l} f'(4^+) = \lim\limits_{x \to 4^+} f'(x) = -2 \cdot 4 + 10 = 2 \\ f'(4^-) = \lim\limits_{x \to 4^-} f'(x) = a \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad f'(4^+) = f'(4^-) \quad \Rightarrow \quad a = 2$$

Para que la función $f(x)$ sea derivable en $(2, 6)$, debe cumplirse que $a = 2$.

Recurriendo a la condición extraída para la continuidad, podemos calcular el valor del parámetro b:

$$4a+b=27 \quad \Rightarrow \quad 4\cdot 2+b=27 \quad \Rightarrow \quad 8+b=27 \quad \Rightarrow \quad b=19$$

Así pues, **para que pueda aplicarse el Teorema de Lagrange a la función $f(x)$ en el intervalo $[2,6]$ debe cumplirse que $a=2$ y $b=19$. La función finalmente adoptará la expresión:**

$$f(x)=\begin{cases} 2x-3 & x<4 \\ -x^2+10x-19 & x\geq 4 \end{cases}$$

Calculemos ahora el punto donde se verifica la tesis del teorema. Deberemos pues resolver la ecuación:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

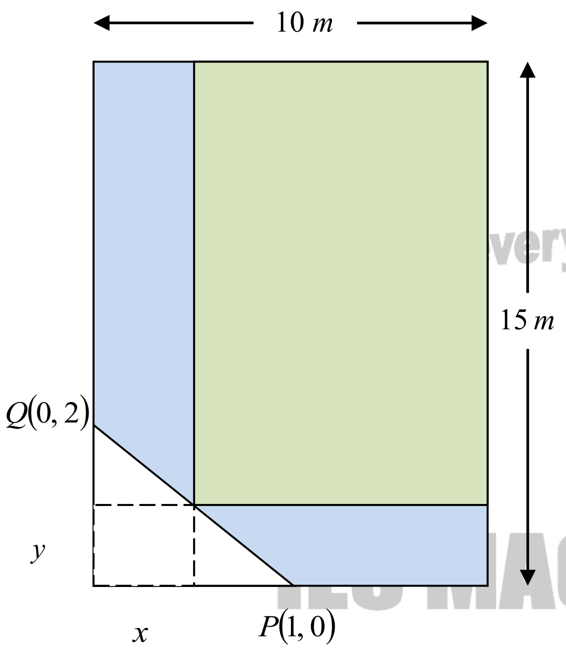
Dado que para $x<4$ no tiene sentido plantear la ecuación, vemos que:

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=2\cdot 2-3=1 \\ f(6)=-6^2+10\cdot 6-19=-36+60-19=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f'(c)=\frac{5-1}{6-2}=1$$

$$f'(c)=1 \quad \Rightarrow \quad -2c+10=1 \quad \Rightarrow \quad -2c=-9 \quad \Rightarrow \quad c=\frac{9}{2}$$

Así pues, el punto c del intervalo $(2,6)$ donde se cumple la tesis es $c=\frac{9}{2}$

PROBLEMA 2: Un equipo de investigación en física cuántica de la *Universidad Chalmers* de *Gotemburgo* planea llevar a cabo un experimento para corroborar el efecto Casimir. Para la realización de dicha prueba necesitan dos placas rectangulares metálicas de 15 metros de alto y 10 metros de ancho. La teoría cuántica de campos predice que entre ambas placas colocadas a una pequeña distancia de separación se genera una fuerza atractiva asociada al vacío cuántico. Durante la colocación de las placas, se produjo un accidente y una de las placas resultó dañada. De una de sus esquinas se rompió un pedazo triangular de tal modo que en dicha esquina el largo de la placa disminuyó en 2 m y el ancho en 1 m. El equipo de investigación desea aprovechar el material restante de manera que forme una nueva placa rectangular. ¿Cómo deberán hacerse los cortes si para el correcto desarrollo del experimento sería deseable que la placa tuviera la mayor superficie posible?



Nuestra función objetivo surge de la intención de maximizar el área de la superficie rectangular.

Definimos las variables que necesitaremos para determinar el área rectangular:

$x \equiv$ *coordenada* x *del vértice de la nueva placa*

$y \equiv$ *coordenada* y *del vértice de la nueva placa*

Según la imagen adjunta la función objetivo vendrá dada por:

$$A(x, y) = (15 - y) \cdot (10 - x)$$

Necesitaremos una condición de ligadura entre las dos variables utilizadas. En este caso, la relación puede obtenerse conociendo la ecuación de la línea recta que une los puntos $P(1, 0)$ y $Q(0, 2)$ en el dibujo.

$$\vec{PQ} = (-1, 2) \quad \Rightarrow \quad m = \frac{2}{-1} = -2$$

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - 2 = -2 \cdot (x - 0) \quad \Rightarrow \quad y = -2x + 2$$

Sustituyendo en la función objetivo, obtenemos que:

$$A(x, y) = (15 - y) \cdot (10 - x) \quad \Rightarrow \quad A(x) = (15 - (-2x + 2)) \cdot (10 - x)$$

$$A(x) = (2x + 13) \cdot (10 - x)$$

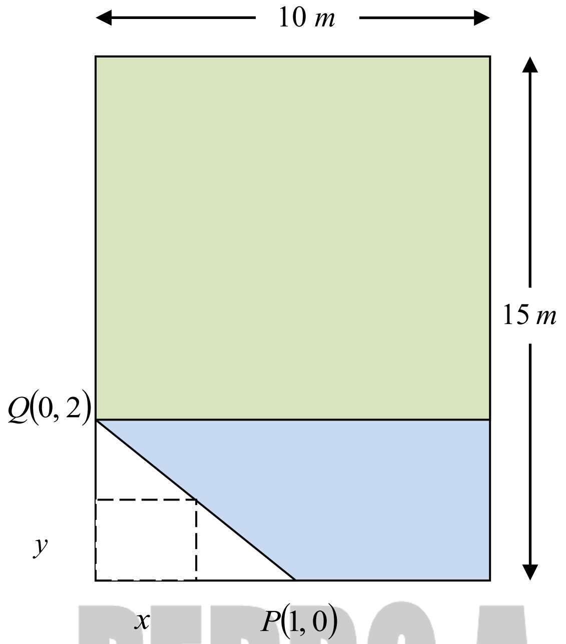
$$A(x) = -2x^2 + 7x + 130$$

Ahora hemos de calcular el máximo de esta función. Para ello, derivamos, igualamos la derivada a cero para obtener los puntos críticos y tras ello estudiaremos la monotonía de la función objetivo para averiguar si alguno de dichos puntos se trata de un máximo:

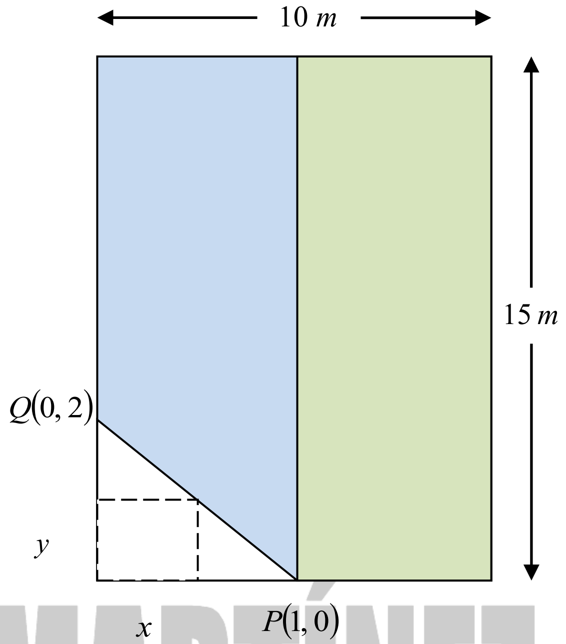
$$A(x) = -2x^2 + 7x + 130 \quad \Rightarrow \quad A'(x) = -4x + 7$$

$$A'(x) = -4x + 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{7}{4}$$

Pero obsérvese que el valor de x obtenido no es factible ya que como mucho, el valor de esta variable puede ser 1 (según el contexto del problema). Así pues, en este caso, el máximo de la función se encontrará en uno de los valores de las situaciones extremas:



$$A(0) = -2 \cdot 0^2 + 7 \cdot 0 + 130 = 130$$



$$A(1) = -2 \cdot 1^2 + 7 \cdot 1 + 130 = 135$$

Así pues, para que la placa tenga el mayor área posible deberá cortarse en forma rectangular con base 9 m y altura 15 m.

PROBLEMA 3: Calcula las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int \frac{dx}{(3x-1)^2}$ b) $\int \frac{(Ln\ x)^2}{x}\,dx$ c) $\int \frac{Ln\ x^2}{x}\,dx$

d) $\int sen^2 3x \cdot cos\,3x\,dx$ e) $\int \frac{3}{1+2\sqrt{e^{-x}}}\,dx$ f) $\int \frac{1}{sen\ x \cdot cos\ x}\,dx$

a) La integral es semi-inmediata de tipo potencial:

$$\int \frac{dx}{(3x-1)^2} = \int (3x-1)^{-2}\ dx = \frac{1}{3}\cdot\int 3\cdot(3x-1)^{-2}\ dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-1)^{-1}}{-1} + C =$$

$$= \frac{-1}{3\cdot(3x-1)} + C = \frac{-1}{9x-3} + C \qquad C \in R$$

b) La integral es inmediata de tipo potencial:

$$\int \frac{(Ln\ x)^2}{x}\,dx = \int \frac{1}{x}(Ln\ x)^2\,dx = \frac{(Ln\ x)^3}{3} + C \qquad C \in R$$

c) La integral es semi-inmediata de tipo potencial:

$$\int \frac{Ln\ x^2}{x}\,dx = \int \frac{2\cdot Ln\ x}{x}\,dx = 2\cdot\int \frac{1}{x}\,Ln\ x\,dx = 2\cdot\int \frac{1}{x}(Ln\ x)^1\ dx = 2\frac{(Ln\ x)^2}{2} + C =$$

$$= (Ln\ x)^2 + C \qquad C \in R$$

d) La integral es semi-inmediata de tipo potencial:

$$\int sen^2 3x \cdot cos\,3x\,dx = \frac{1}{3}\int 3\cdot cos\,3x \cdot sen^2 3x\,dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{sen^3 3x}{3} + C = \frac{sen^3 3x}{9} + C \qquad C \in R$$

e) La integral es semi-inmediata de tipo logarítmica:

$$\int \frac{3}{1+2\sqrt{e^{-x}}}\,dx = \left[\begin{array}{l} Multiplicamos\ numerador\ y \\ denominador\ por\ \sqrt{e^x} \end{array}\right] = \int \frac{3\cdot\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x}+2}\,dx = \int \frac{3\cdot e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}+2}\,dx =$$

$$= 3\cdot\int \frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}+2}\,dx = 2\cdot 3\cdot\int \frac{\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}+2}\,dx = 6\cdot Ln\left(e^{\frac{x}{2}}+2\right)+C = 6\cdot Ln\left(\sqrt{e^x}+2\right)+C \qquad C\in R$$

f) La integral es semi-inmediata de tipo logarítmica:

$$\int \frac{1}{sen\ x\cdot cos\ x}\,dx = \left[\begin{array}{l} Sabemos\ que: \\ 1 = sen^2 x + cos^2 x \end{array}\right] = \int \frac{sen^2 x + cos^2 x}{sen\ x\cdot cos\ x}\,dx =$$

$$= \int \frac{sen^2 x}{sen\ x\cdot cos\ x}\,dx + \int \frac{cos^2 x}{sen\ x\cdot cos\ x}\,dx = \int \frac{sen\ x}{cos\ x}\,dx + \int \frac{cos\ x}{sen\ x}\,dx =$$

$$= -\int \frac{-sen\ x}{cos\ x}\,dx + \int \frac{cos\ x}{sen\ x}\,dx = -Ln\,|cos\ x| + Ln\,|sen\ x| + C$$

$$= Ln\left|\frac{sen\ x}{cos\ x}\right| + C = Ln\,|\ tg\ x\ | + C \qquad C\in R$$