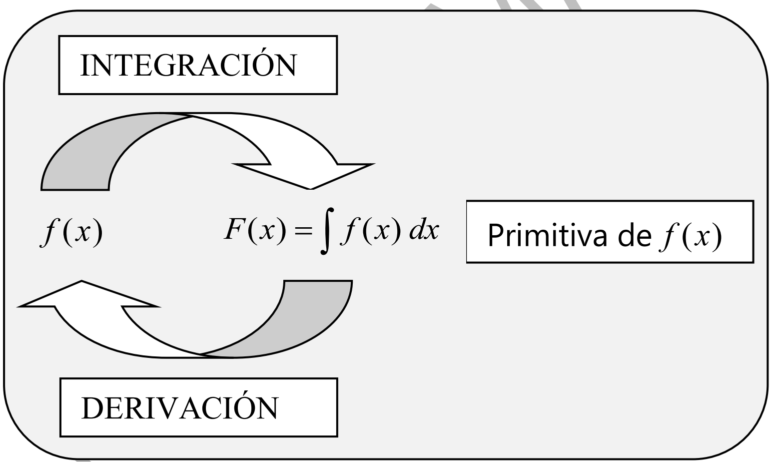
10 RESUMEN INTEGRAL INDEFINIDA. TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN.

IES MACIÁ ABELA
Pedro A. Martínez

*A continuación se presenta un resumen de los contenidos referentes al tema de integración de funciones reales de variable real. Este documento deberá entenderse como una **herramienta de apoyo**. En ningún momento se considerará como base teórica.*

El cálculo de integrales es otra de las herramientas matemáticas de mayor trascendencia junto con el ya estudiado cálculo de derivadas. Sus aplicaciones son múltiples y variadas en economía, física, ingeniería y otras disciplinas destacando su uso para el cálculo de áreas y volúmenes.



La mayor dificultad en el cálculo de integrales radica en la identificación del método de integración que debe aplicarse para poder obtener la primitiva de la función que se integra. Ello se debe a que no existe una regla o norma que nos identifique de forma unívoca el tipo de integral. "A integrar se aprende integrando", es decir, mediante la resolución de una gran cantidad de integrales adquiriremos la pericia necesaria que nos permitirá en muchas ocasiones identificar de un simple vistazo el método de integración adecuado. Existe una gran diversidad de métodos de integración pero en este curso nos limitaremos sólo algunos de ellos.

10.1. INTEGRACIÓN INMEDIATA Y SEMI-INMEDIATA

Para la integración inmediata y semi-inmediata es necesario conocer las integrales de ciertas funciones elementales. Dado que la integración es la operación recíproca de la derivación, la tabla de integrales inmediatas guarda una relación evidente con la de derivadas.

	SIMPLES INMEDIATAS	***COMPUESTAS INMEDIATAS***
Tipo constante $k \in R$	$\int k\ dx = kx + C$	
Tipo potencial $n \neq -1$	$\int x^n\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int f'(x) \cdot f^n(x)\ dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C$
Tipo logarítmica	$\int \frac{1}{x}\ dx = Ln\ \lvert x \rvert + C$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\ dx = Ln\ \lvert f(x) \rvert + C$
Tipo exponencial	$\int a^x\ dx = \frac{a^x}{Ln\ a} + C$	$\int f'(x) \cdot a^{f(x)}\ dx = \frac{a^{f(x)}}{Ln\ a} + C$
	$\int e^x\ dx = e^x + C$	$\int f'(x) \cdot e^{f(x)}\ dx = e^{f(x)} + C$
Tipo trigonométrica	$\int \sin x\ dx = -\cos x + C$	$\int f'(x) \cdot \sin f(x)\ dx = -\cos f(x) + C$
	$\int \cos x\ dx = \sin x + C$	$\int f'(x) \cdot \cos f(x)\ dx = \sin f(x) + C$
	$\int \frac{1}{\cos^2 x}\ dx = tg\ x + C$ $\int \sec^2 x\ dx = tg\ x + C$ $\int \left(1 + tg^2 x\right) dx = tg\ x + C$	$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\ dx = tg\ f(x) + C$ $\int f'(x) \cdot \sec^2 f(x)\ dx = tg\ f(x) + C$ $\int f'(x) \cdot \left(1 + tg^2 f(x)\right) dx = tg\ f(x) + C$
Tipo arcoseno	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \arcsin x + C$ $\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \arccos x + C$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}\ dx = \arcsin f(x) + C$ $\int \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}\ dx = \arccos f(x) + C$
Tipo arcotangente	$\int \frac{1}{1+x^2}\ dx = arctg\ x + C$	$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\ dx = arctg\ f(x) + C$

REGLAS BÁSICAS DE INTEGRACIÓN	
Producto de un escalar por una función	$\int k \cdot f(x)\, dx = k \cdot \int f(x)\, dx$
***Suma**/diferencia de funciones*	$\int f(x) \pm g(x)\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$

Veamos algunos ejemplos:

$$\int e^{2x}\, dx = \left[\begin{array}{l} \text{Integral de tipo exponencial. Para poder integrar} \\ \text{primero debemos asegurarnos de que la derivada} \\ \text{del argumento de la función principal está} \\ \text{multiplicando a la función.} \end{array} \right] = \frac{1}{2}\int 2 \cdot e^{2x}\, dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

$$\int (3x+2)^5\, dx = \left[\begin{array}{l} \text{Integral de tipo potencial. Nuevamente,} \\ \text{debemos buscar la derivada del argumento.} \\ \text{En este caso, del polinomio.} \end{array} \right] = \frac{1}{3}\int 3 \cdot (3x+2)^5\, dx =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x+2)^6}{6} + C = \frac{(3x+2)^6}{18} + C$$

$$\int \frac{1}{5x-6}\, dx = \left[\begin{array}{l} \text{Integral de tipo logarítmica. Nuevamente,} \\ \text{debemos buscar la derivada del argumento.} \\ \text{En este caso, del denominador.} \end{array} \right] = \frac{1}{5}\int \frac{5}{5x-6}\, dx = \frac{1}{5} \cdot Ln\,(5x-6) + C$$

$$\int \frac{x}{x^2+1}\, dx = \left[\begin{array}{l} \text{Integral de tipo logarítmica. Nuevamente,} \\ \text{debemos buscar la derivada del denominador.} \end{array} \right] = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2} \cdot Ln\,(x^2+1) + C$$

$$\int \cos\,(3x+1)\, dx = [\text{Integral de tipo trigonométrica.}] = \frac{1}{3}\int 3 \cdot \cos\,(3x+1)\, dx = \frac{sen\,(3x+1)}{3} + C$$

10.2. INTEGRACIÓN POR PARTES

La integración por partes suele aplicarse en el cálculo de primitivas de funciones que resultan del producto/cociente de dos funciones de naturaleza (por lo general) distinta: un polinomio por una función exponencial, un polinomio por una función trigonométrica, un polinomio por una función logarítmica, una función trigonométrica por una función exponencial, etc. Se resuelven aplicando la fórmula:

$$\boxed{\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du}$$

<u>*REGLA MNEMOTÉCNICA*</u>

***U**n **d**ía **v**i **u**na **v**aca sin bastón **v**estida **d**e **u**niforme*

En general, una guía (no siempre eficaz) para la asignación de los papeles u y dv consiste en denominar u a aquella función que resulta **más fácil de derivar** (proporcionando una derivada sencilla) y dv a aquella que resulta **más fácil de integrar** de manera inmediata. También existe la conocida regla de los ALPES:

Arco **L**ogarítmicas **P**olinomios **E**xponenciales **S**eno

$\longleftarrow\; u \;\text{———————}$

Veamos un ejemplo sencillo:

$$\int x\cdot e^x\,dx = \begin{bmatrix} u = x & \to & du = 1\,dx \\ dv = e^x\,dx & \to & v = \int e^x\,dx = e^x \end{bmatrix} = x\cdot e^x - \int e^x\,dx =$$

$$= x\cdot e^x - e^x + C = e^x\cdot(x-1) + C$$

En algunas ocasiones deberemos aplicar el método de integración por partes varias veces para poder obtener la primitiva de la función deseada. Unas integrales especiales que se resuelven por partes son las denominadas **integrales recurrentes**, llamadas así porque al aplicar el método de integración por partes sucesivamente entramos en un bucle del que no se puede salir de la forma estándar. Veamos un ejemplo:

$$\int e^x \cdot \sin x\, dx = \begin{bmatrix} u = \sin x & \rightarrow & du = \cos x\, dx \\ dv = e^x\, dx & \rightarrow & v = \int e^x\, dx = e^x \end{bmatrix} = e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \cos x\, dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = \cos x & \rightarrow & du = -\sin x\, dx \\ dv = e^x\, dx & \rightarrow & v = \int e^x\, dx = e^x \end{bmatrix} = e^x \cdot \sin x - \left[e^x \cdot \cos x - \int -e^x \cdot \sin x\, dx \right] =$$

$$= e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot \sin x\, dx = e^x \cdot (\sin x - \cos x) - \int e^x \cdot \sin x\, dx$$

Tenemos pues que: $\int e^x \cdot \sin x\, dx = e^x \cdot (\sin x - \cos x) - \int e^x \cdot \sin x\, dx$

Llamado $I = \int e^x \cdot \sin x\, dx$ (que es la integral que deseamos calcular) tenemos:

$$I = e^x \cdot (\sin x - \cos x) - I \quad \Rightarrow 2I = e^x \cdot (\sin x - \cos x) \quad \Rightarrow \quad I = \frac{e^x \cdot (\sin x - \cos x)}{2}$$

$$\int e^x \cdot \sin x\, dx = \frac{e^x \cdot (\sin x - \cos x)}{2} + C$$

10.3. INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN

El método de sustitución o cambio de variable está basado en la integración inmediata compuesta, es por ello que todas las integrales que se resuelven mediante sustitución pueden ser resueltas a su vez mediante integración inmediata compuesta. Para **cambiar de variable** identificamos una parte de lo que se va a integrar con una nueva **variable t**, de modo que se obtenga una **integral** más sencilla. Veamos un ejemplo:

$$\int \frac{x}{x^2-5}\,dx = \begin{bmatrix} t = x^2-5 \\ dt = 2x\,dx \;\Rightarrow dx = \dfrac{dt}{2x} \end{bmatrix} = \int \frac{x}{t}\cdot\frac{dt}{2x} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{2}\cdot Ln\ t + C =$$

$$= [Deshacemos\ el\ cambio] = \frac{1}{2}\cdot Ln\ (x^2-5) + C$$

10.4. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Las integrales trigonométricas pueden resolverse algunas por sustitución y otras aplicando equivalencias trigonométricas conocidas, por lo que deberemos recordar algunas de las más importantes:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$tg\ x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$
$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$	$\sin\dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$
$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$	$\cos\dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$
$tg\,(x \pm y) = \dfrac{tg\ x \pm tg\ y}{1 \mp tg\ x \cdot tg\ y}$	$tg\dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$	$\cos x \cdot \cos y = \dfrac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$	$\sin x \cdot \cos y = \dfrac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2}$
$tg\, 2x = \dfrac{2tg\, x}{1 - tg^2 x}$	$\cos x \cdot \cos y = \dfrac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$

No obstante existe un tipo de integral trigonométrica que puede resolverse fácilmente mediante sustitución. Hablamos de las integrales de la forma:

$$\int \sin^n x \cdot \cos^m x \, dx$$

Para éstas aplicaremos el cambio de variable $t = \sin x$ o $t = \cos x$ dependiendo de si el **exponente** del seno o el del coseno es **par**, respectivamente. Si ambos exponentes fueran **impares**, cualquiera de los dos cambios resulta útil. Si **ambos exponentes son pares**, es preferible la utilización de relaciones trigonométricas. No obstante, existe un cambio de variable que es válido en cualquier caso, aunque su uso no siempre lleva a expresiones finales sencillas, se trata de considerar:

$$t = tg\,\frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$$tg\,\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \quad \Rightarrow \quad t^2 = \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \quad \Rightarrow \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad \sin x = \sqrt{1-\frac{1-t^2}{1+t^2}} \quad \Rightarrow \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

10.4. INTEGRACIÓN TIPO ARCOTANGENTE

$$\int \frac{k}{a+bx^2}\,dx = \frac{k\sqrt{ab}}{ab}\cdot arctg\left(\sqrt{\frac{b}{a}}x\right)+C$$

Resolvamos una de ellas a modo de ejemplo guiado. Veamos como calcular la integral indefinida:

$$\int \frac{4}{5+3x^2}\,dx$$

1. Conseguimos transformar un sumando del denominador en un 1 dividiendo por el valor del sumando original tanto numerador como denominador. Tras ello, extraemos la constante del numerador fuera de la integral:

$$\int \frac{4}{5+3x^2}\,dx = \int \frac{\frac{4}{5}}{\frac{5}{5}+\frac{3}{5}x^2}\,dx = \frac{4}{5}\cdot\int \frac{1}{1+\frac{3}{5}x^2}\,dx$$

2. Agrupamos el otro sumando del denominador en un cuadrado:

$$\frac{4}{5}\cdot\int \frac{1}{1+\frac{3}{5}x^2}\,dx = \frac{4}{5}\cdot\int \frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{3}{5}}x\right)^2}\,dx$$

3. Multiplicamos y dividimos por la derivada de la expresión que hay en el interior del cuadrado.

$$\frac{4}{5}\cdot\int \frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{3}{5}}x\right)^2}\,dx = \frac{4}{5}\cdot\sqrt{\frac{5}{3}}\cdot\int \frac{\sqrt{\frac{3}{5}}}{1+\left(\sqrt{\frac{3}{5}}x\right)^2}\,dx$$

4. Finalmente integramos la función de tipo arcotangente y simplificamos:

$$\frac{4}{5}\cdot\sqrt{\frac{5}{3}}\cdot\int \frac{\sqrt{\frac{3}{5}}}{1+\left(\sqrt{\frac{3}{5}}x\right)^2}\,dx = \frac{4}{5}\cdot\sqrt{\frac{5}{3}}\cdot arctg\left(\sqrt{\frac{3}{5}}x\right)+C = \frac{4\sqrt{15}}{15}\cdot arctg\left(\sqrt{\frac{3}{5}}x\right)+C$$

10.4. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES

Antes de aplicar los métodos explicados a continuación es conveniente **asegurarse de que** la función racional que deseamos integrar **no es inmediata** o puede simplificarse mediante la factorización oportuna.

Distinguimos dos tipos básicos de integración racional no inmediata:

1. **TIPO I: CUANDO EL GRADO DEL NUMERADOR ES IGUAL O MAYOR QUE EL DEL DENOMINADOR**

En este caso, efectuaremos la división de los polinomios y calcularemos la integral de la función racional expresada como sigue:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx = \int C(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx$$

Donde $C(x)$ es el cociente de la división y $R(x)$ el resto. Veamos un ejemplo:

$$\int \frac{x^2-4x+6}{x-3}\,dx = \int \left(x-1+\frac{3}{x-3} \right) dx =$$

$$= \int (x-1)\,dx + \int \frac{3}{x-3}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - x + 3 \cdot Ln\left| x-3 \right| + C$$

$$\begin{array}{rl}
x^2-4x+6 & \underline{\left| \; x-3 \right.} \\
\underline{-x^2+3x} & \;\; x-1 \\
-x+6 & \\
\underline{x-3} & \\
3 &
\end{array}$$

$$D = d \cdot c + r$$

$$\frac{D}{d} = c + \frac{r}{d}$$

2. TIPO II: CUANDO EL GRADO DEL NUMERADOR ES MENOR QUE EL GRADO DEL DENOMINADOR

En este caso, descompondremos la función como suma de funciones simples de la forma:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx &= \left[\int \frac{A_0}{x-x_0}\,dx + \ldots + \int \frac{A_i}{x-x_i}\,dx\right] + \ldots \\
\ldots + &\left[\int \frac{B_{01}}{x-\hat{x}_0}\,dx + \int \frac{B_{02}}{(x-\hat{x}_0)^2}\,dx + \ldots + \int \frac{B_{0m_0}}{(x-\hat{x}_0)^{m_0}}\,dx\right] + \ldots \\
\ldots + &\left[\int \frac{B_{j1}}{x-\hat{x}_j}\,dx + \ldots + \int \frac{B_{jm_j}}{(x-\hat{x}_j)^{m_j}}\,dx\right] + \ldots \\
\ldots + &\int \frac{Cx+D}{ax^2+bx+c}\,dx + \ldots + \int \frac{Ex+F}{\hat{a}x^2+\hat{b}x+\hat{c}}\,dx
\end{aligned}
$$

Los pasos clave a seguir para construir esta descomposición son los siguientes. Veámoslo mediante la realización de un ejemplo guiado. Vamos a calcular:

$$\int \frac{4x^4+12x^3+6x^2+x-5}{x^5+3x^4+x^3-x^2-4}\,dx$$

<u>Paso 1</u>: Descomponemos el denominador en producto de polinomios irreducibles. Para ello podemos recurrir a las identidades notables, resolución de la ecuación o Ruffini.

$$
\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 & -4 \\
1 & & 1 & 4 & 5 & 4 & 4 \\
\hline
 & 1 & 4 & 5 & 4 & 4 & \boxed{0} \\
-2 & & -2 & -4 & -2 & -4 & \\
\hline
 & 1 & 2 & 1 & 2 & \boxed{0} & \\
-2 & & -2 & 0 & -2 & & \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} & &
\end{array}
$$

$$Q(x) = x^5+3x^4+x^3-x^2-4$$

$$x^2+1=0 \rightarrow x=\sqrt{-1} \notin \Re$$

$$Q(x) = (x-1)\cdot(x+2)^2\cdot(x^2+1)$$

Paso 2: Clasificamos las raíces del denominador y determinamos su multiplicidad:

$$Q(x) = (x-1)\cdot(x+2)^2\cdot(x^2+1) \quad \begin{array}{lll} \nearrow & x = 1 & \Rightarrow Raiz\ simple \\ \rightarrow & x = 2 & \Rightarrow Raiz\ multiple\ (multiplicidad\ 2) \\ \searrow & x = \sqrt{-1} & \Rightarrow Raiz\ compleja \end{array}$$

Paso 3: Asignamos las fracciones simples a cada raíz. Las raíces simples determinarán una fracción simple del tipo:

$$\frac{A}{x-1}$$

Las raíces múltiples determinarán tantas fracciones simples como multiplicidad posean, éstas serán de la forma:

$$\frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$$

Finalmente las raíces complejas determinarán una fracción de la forma:

$$\frac{Dx+E}{x^2+1}$$

Así pues, la integral propuesta se descompondrá como suma de dichas fracciones más simples:

$$\int \frac{4x^4+12x^3+6x^2+x-5}{x^5+3x^4+x^3-x^2-4}\,dx = \int \frac{A}{x-1}\,dx + \int \frac{B}{x+2}\,dx + \int \frac{C}{(x+2)^2}\,dx + \int \frac{Dx+E}{x^2+1}\,dx$$

Paso 4: Calculamos las constantes (numeradores) de las fracciones simples. Para ello sumamos las fracciones simples y comparamos el numerador obtenido con el numerador de la función a integrar.

$$\frac{4x^4+12x^3+6x^2+x-5}{x^5+3x^4+x^3-x^2-4}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+1}=$$

$$=\frac{A\cdot(x+2)^2\cdot(x^2+1)+B\cdot(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x^2+1)+C\cdot(x-1)\cdot(x^2+1)+(Dx+E)\cdot(x-1)\cdot(x+2)^2}{(x-1)\cdot(x+2)^2\cdot(x^2+1)}$$

Los numeradores deben ser iguales:

$$4x^4+12x^3+6x^2+x-5=$$
$$=A\cdot(x+2)^2\cdot(x^2+1)+B\cdot(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x^2+1)+C\cdot(x-1)\cdot(x^2+1)+(Dx+E)\cdot(x-1)\cdot(x+2)^2$$

Dando valores a la indeterminada x, podemos ir obteniendo los valores de las constantes A, B, C, D y E:

$$x=1 \quad\Rightarrow\quad 18=A\cdot(1+2)^2\cdot(1^2+1) \quad\Rightarrow\quad 18=18\cdot A \quad\Rightarrow\quad \boxed{A=1}$$
$$x=-2 \quad\Rightarrow\quad -15=C\cdot(-2-1)\cdot((-2)^2+1) \quad\Rightarrow\quad -15=-15\cdot C \quad\Rightarrow\quad \boxed{C=1}$$
$$x=0 \quad\Rightarrow\quad -5=4A-2B-C-4E \quad\Rightarrow\quad 2B+4E=8 \quad\Rightarrow\quad B+2E=4$$
$$x=-1 \quad\Rightarrow\quad -8=2A-4B-4C+2D-2E \quad\Rightarrow\quad 4B-2D+2E=6 \quad\Rightarrow\quad 2B-D+E=3$$
$$x=2 \quad\Rightarrow\quad 181=80A+20B+5C+32D+16E \quad\Rightarrow\quad 20B+32D+16E=96 \quad\Rightarrow\quad 5B-8D+4E=24$$

En ocasiones deberemos de resolver un sistema de ecuaciones para conocer los valores de las constantes:

$$\begin{cases} B+2E=4 \\ 2B-D+E=3 \\ 5B-8D+4E=24 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \boxed{B=2}\ \boxed{D=1}\ \boxed{E=2}$$

<u>Paso 5</u>: Integramos cada función racional simple:

$$\int\frac{4x^4+12x^3+6x^2+x-5}{x^5+3x^4+x^3-x^2-4}\,dx=\int\frac{1}{x-1}\,dx+\int\frac{2}{x+2}\,dx+\int\frac{1}{(x+2)^2}\,dx+\int\frac{x+2}{x^2+1}\,dx$$

Integrando cada fracción simple:

$$\int \frac{1}{x-1}\,dx = Ln\,|x-1|$$

$$\int \frac{2}{x+2}\,dx = 2\cdot Ln\,|x+2|$$

$$\int \frac{1}{(x+2)^2}\,dx = \int (x+2)^{-2}\,dx = \frac{(x+2)^{-1}}{-1} = \frac{-1}{x+2}$$

$$\int \frac{x+2}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x}{x^2+1}\,dx + 2\cdot\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + 2\cdot\int \frac{1}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}Ln\left(x^2+1\right) + 2\cdot arctg\ x$$

En definitiva:

$$\int \frac{4x^4+12x^3+6x^2+x-5}{x^5+3x^4+x^3-x^2-4}\,dx = Ln\,|x-1| + 2\cdot Ln\,|x+2| - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{2}Ln\left(x^2+1\right) + 2\cdot arctg\ x + C$$

O lo que es igual:

$$\int \frac{4x^4+12x^3+6x^2+x-5}{x^5+3x^4+x^3-x^2-4}\,dx = Ln\left|(x-1)\cdot(x+2)^2\sqrt{x^2+1}\right| - \frac{1}{x+2} + 2\cdot arctg\ x + C$$