DOSSIER SEMANAL 12

MATEMÁTICAS II

Por Pedro A. Martínez

PROBLEMA 1: Considera las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&5&7\\0&-3&-1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&-3\\0&-3&2\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}5\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$E=\begin{pmatrix}-5&1&2\end{pmatrix}\quad F=\begin{pmatrix}0&2&5\\-2&0&-4\\-5&4&0\end{pmatrix}\quad G=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&-2\\2&0&1\end{pmatrix}\quad H=\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}$$

a) **Clasifica cada una de las matrices** anteriores atendiendo a la tipología básica estudiada en clase (*matriz fila, columna, cuadrada, rectangular, simétrica, anti-simétrica, diagonal, escalar o triangular*)

b) **Calcula**, cuando sea posible, las siguientes operaciones con matrices:

1)	$2C+3G$	4)	$G\cdot A$	7)	$B\cdot(2A+C)$
2)	$-4B+7H$	5)	$E\cdot D$	8)	B^3
3)	$-E+5D^T$	6)	$H\cdot B$	9)	$F^2\cdot A+2E^T$

a) La clasificación que podríamos realizar es la siguiente:

A es una matriz cuadrada de orden 3 y triangular superior.

B es una matriz rectangular de dimensión 2 x 3.

C es una matriz cuadrada de orden 3 simétrica.

D es una matriz columna.

E es una matriz fila.

F es una matriz cuadrada de orden 3 anti-simétrica.

G es una matriz cuadrada de orden 3.

H es una matriz cuadrada de orden 2, diagonal, escalar y simétrica.

b) Realicemos, a continuación las operaciones matriciales indicadas siempre que sea posible:

1) $$2C+3G=2\cdot\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&-3\\0&-3&2\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&-2\\2&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&0\\2&2&-6\\0&-6&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6&0&0\\3&3&-6\\6&0&3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & -12 \\ 6 & -6 & 7 \end{pmatrix}$$

2) $-4B+7H$ *No puede realizarse porque las dimensiones de B y H son diferentes.*

3) $-E+5D^T=-\begin{pmatrix}-5 & 1 & 2\end{pmatrix}+5\cdot\begin{pmatrix}5\\1\\-1\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}5 & -1 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}25 & 5 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}30 & 4 & -7\end{pmatrix}$

4) $G\cdot A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\1 & 1 & -2\\2 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\1 & 2 & -1\\2 & 2 & 1\end{pmatrix}$

5) $E\cdot D=\begin{pmatrix}-5 & 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-25+1-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-26\end{pmatrix}$

6) $H\cdot B=\begin{pmatrix}5 & 0\\0 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 5 & 7\\0 & -3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 25 & 35\\0 & -15 & -5\end{pmatrix}$

7) $B\cdot(2A+C)=\begin{pmatrix}1 & 5 & 7\\0 & -3 & -1\end{pmatrix}\cdot\left[2\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 1 & -3\\0 & -3 & 2\end{pmatrix}\right]=$

$$=\begin{pmatrix}1 & 5 & 7\\0 & -3 & -1\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\0 & 2 & 2\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 1 & -3\\0 & -3 & 2\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1 & 5 & 7\\0 & -3 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 3 & 0\\1 & 3 & -1\\0 & -3 & 4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}8 & -3 & 23\\-3 & -6 & -1\end{pmatrix}$$

8) B^3 *No puede realizarse porque la matriz B no es cuadrada*

9) $F^2\cdot A+2E^T$

No puede realizarse ya que el resultado de $F^2\cdot A$ *es una matriz cuadrada de orden 3. Dado que la dimensión de ésta no coincide con la dimensión de* $2E^T$*, la suma final no puede efectuarse.*

PROBLEMA 2: **Calcula**, razonadamente la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^n$ siendo $n \in N$.

Calcularemos las primeras potencias para ver si existe alguna pauta clara que podamos sintetizar de forma matemática:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 10 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 10 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 15 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Así pues observamos que los términos sobre la diagonal principal siempre son nulos, que la diagonal está formada siempre por unos y que los términos a_{21} y a_{32} coinciden con el valor del exponente al que se eleva la matriz:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ ? & n & 1 \end{pmatrix}$$

Para averiguar el término a_{31} basta disponer la secuencia generada y observar que se trata de una sucesión aritmética de segundo orden:

$$b_1 = 1 \quad b_2 = 3 \quad b_3 = 6 \quad b_4 = 10 \quad b_5 = 15 \quad \ldots$$

+2 +3 +4 +5

+1 +1 +1

Obtengamos su término general. Sabemos que será de la forma general:

$$b_n = an^2 + bn + c \qquad con\ n \in N$$

Así pues, deberemos resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} b_1 = 1 = a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c \\ b_2 = 3 = a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c \\ b_3 = 6 = a\cdot 3^2 + b\cdot 3 + c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a+b+c=1 \\ 4a+2b+c=3 \\ 9a+3b+c=6 \end{array}\right\}$$

Utilizando el método de Gauss, observamos que:

$$\left.\begin{array}{r} c+b+a=1 \\ c+2b+4a=3 \\ c+3b+9a=6 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 9 & 6 \end{pmatrix} \overset{\substack{F2'=F2-F1 \\ F3'=F3-F1}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 8 & 5 \end{pmatrix} \overset{F3'=F3-2F2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} c+b+a=1 \\ b+3a=2 \\ 2a=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a = b = \frac{1}{2} \quad c = 0$$

Por tanto, nuestra hipótesis inicial será que la potencia n-ésima de la matriz dada es:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ \frac{n^2+n}{2} & n & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ \frac{n\cdot(n+1)}{2} & n & 1 \end{pmatrix}$$

Demostremos por inducción sobre n que ciertamente es así:

PASO I: Vemos que se cumple para *n=1*: $A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1\cdot(1+1)}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

PASO II: Supongamos que la hipótesis es cierta para un valor genérico $k \in N$:

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ \frac{k^2+k}{2} & k & 1 \end{pmatrix}$$

PASO III: Ahora debemos demostrar que se cumple la fórmula para $k+1$. Es decir, que cuando calculemos A^{k+1} se obtenga:

$$A^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k+1 & 1 & 0 \\ \frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2} & k+1 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobémoslo:

$$A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ \frac{k\cdot(k+1)}{2} & k & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k+1 & 1 & 0 \\ \frac{k\cdot(k+1)}{2}+k+1 & k+1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k+1 & 1 & 0 \\ \frac{k\cdot(k+1)+2k+2}{2} & k+1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k+1 & 1 & 0 \\ \frac{k\cdot(k+1)+2\cdot(k+1)}{2} & k+1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k+1 & 1 & 0 \\ \frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2} & k+1 & 1 \end{pmatrix}$$

Así pues, con ello, queda demostrado que la potencia n-ésima de la matriz propuesta es: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ \frac{n\cdot(n+1)}{2} & n & 1 \end{pmatrix}$

PROBLEMA 3: Escribe la definición de **matriz inversa**. A continuación, calcula razonadamente la inversa de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Se dice que A^{-1} **es inversa** de la matriz $A_{n\,x\,n}$ si se verifica que:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$$

donde I es la matriz identidad de orden n.

Calculemos ahora la inversa de la matriz A utilizando el método de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F2'=F2-F1}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\overset{F3'=FE-2F2}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \overset{F3'=F3/(-2)}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1/2 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\overset{\substack{F2'=F2-2F3 \\ F1'=F1+F3}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1/2 \end{array}\right) \overset{F1'=F1-F2}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1/2 \end{array}\right)$$

Así pues, la inversa de la matriz A, propuesta será:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3/2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Es fácil comprobar ahora que $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$