SOLUCIONES

DOSIER SEMANAL 02

MATEMÁTICAS II

Por Pedro A. Martínez

PROBLEMA 1: A continuación, determina (siempre que sea posible) la expresión analítica que permita calcular la matriz X que verifica la ecuación matricial indicada en cada caso:

a) $AX - 4B = B$ b) $A = BX$ c) $XB + B = A - 5X$

d) $AX + XA = B$ e) $AX - C = CX$ f) $AXB - 2C^T = 4XB$

a) $AX - 4B = B \quad \rightarrow \quad AX = B + 4B \quad \rightarrow \quad AX = 5B$

Suponiendo ahora que la matriz A es regular (es decir, tiene inversa) podremos pre-multiplicar ambos términos de la ecuación por la inversa de la matriz A:

$$A^{-1}AX = A^{-1}5B \quad \rightarrow \quad IX = 5A^{-1}B \quad \rightarrow \quad X = 5A^{-1}B$$

b) **Suponiendo que la matriz B es regular** podremos pre-multiplicar ambos términos de la ecuación por la inversa de la matriz B:

$$B^{-1}A = B^{-1}BX \quad \rightarrow \quad B^{-1}A = IX \quad \rightarrow \quad X = B^{-1}A$$

c) $XB + B = A - 5X \quad \rightarrow \quad XB + 5X = A - B \quad \rightarrow \quad X \cdot (B + 5I) = A - B$

Suponiendo ahora que la matriz $B + 5I$ **es regular** podremos post-multiplicar ambos términos de la ecuación por su inversa:

$$X \cdot (B + 5I)(B + 5I)^{-1} = (A - B)(B + 5I)^{-1} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad X \cdot I = (A - B)(B + 5I)^{-1} \quad \rightarrow \quad X = (A - B)(B + 5I)^{-1}$$

d) De la ecuación propuesta no podemos obtener una expresión analítica de la matriz X ya que no podemos extraerla factor común al estar multiplicando a otras matrices por lados distintos.

e) $AX - C = CX \quad \rightarrow \quad AX - CX = C \quad \rightarrow \quad (A - C)X = C$

Suponiendo ahora que la matriz $(A - C)$ **es invertible** podremos pre-multiplicar ambos términos de la ecuación su inversa:

$$(A - C)^{-1}(A - C)X = (A - C)^{-1}C \quad \rightarrow \quad IX = (A - C)^{-1}C \quad \rightarrow \quad X = (A - C)^{-1}C$$

f) $AXB-2C^T=4XB \quad \rightarrow \quad AXB-4XB=2C^T$

Extraemos factor común XB (por la derecha):

$$AXB-4XB=2C^T \quad \rightarrow \quad (A-4I)XB=2C^T$$

Suponiendo ahora que la matriz $A-4I$ **es invertible** podremos pre-multiplicar ambos términos de la ecuación por su inversa:

$$(A-4I)XB=2C^T \quad \rightarrow \quad (A-4I)^{-1}(A-4I)XB=2(A-4I)^{-1}C^T$$

$$\rightarrow \quad IXB=2(A-4I)^{-1}C^T \quad \rightarrow \quad XB=2(A-4I)^{-1}C^T$$

Finalmente, s**uponiendo que la matriz** B **también es invertible** podremos post-multiplicar ambos términos de la ecuación por su inversa:

$$XB=2(A-4I)^{-1}C^T \rightarrow \quad XBB^{-1}=2(A-4I)^{-1}C^TB^{-1} \quad \rightarrow \quad X=2(A-4I)^{-1}C^TB^{-1}$$

PROBLEMA 2: Considera las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&2&0\\1&0&0\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&-3&1\\2&1&m\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

Se pide:

a) **Calcula** A^n siendo n un número natural cualquiera.

b) Determina el rango de la matriz B en función del parámetro real m.

c) ¿Qué condición debe cumplir el rango de una matriz cuadrada para que sea regular? ¿Para qué valores de m es invertible la matriz B?

d) Para m=5 determina, si es posible la inversa de la matriz B

e) Para m=5, determina la matriz X que verifica

$$XB+C^t=A^3$$

donde I es la matriz identidad de orden 3.

a) Calcularemos las primeras potencias para ver si existe alguna pauta clara que podamos sintetizar de forma matemática:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 32 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así pues, observamos que la potencia de la matriz propuesta modifica su estructura básica en función de si el exponente de la potencia es par o impar. No obstante, el término que ocupa la fila 2 y columna 2 siempre resulta ser la potencia en base 2 con el mismo exponente al que está elevada la matriz. Por tanto, podemos decir que:

$$A^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & si\ n\ es\ impar \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & si\ n\ es\ par \end{cases}$$

Demostremos por inducción sobre n que ciertamente es así.

PASO I: Vemos que se cumple para *n=1*: $A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2^1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

PASO II: Consideramos que la hipótesis es cierta para un valor genérico $k \in N$ que supondremos (sin pérdida de generalidad) que es impar

$$A^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

PASO III: Ahora debemos demostrar que se cumple la fórmula para $k+1$. Dado que si k es impar, k+1 será par, deberemos obtener que:

$$A^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobémoslo:

$$A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k \cdot 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Así pues, queda demostrado que la potencia n-ésima de la matriz propuesta es:

$$A^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & si\ n\ es\ impar \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & si\ n\ es\ par \end{cases}$$

b) Dado que de momento sólo disponemos del método de Gauss para determinar el rango de una matriz, será este método el que empleemos.

$$Rg(B) = Rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F'_2 = F_2 - F_1 \\ F'_3 = F_3 - 2F_1 \end{bmatrix} = Rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & -3 & m-6 \end{pmatrix} =$$

$$= [F'_3 = 5F_3 - 3F_2] = Rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 5m-24 \end{pmatrix}$$

Así pues, el rango de la matriz propuesta dependerá de:

$$5m - 24 = 0 \;\rightarrow\; m = \frac{24}{5}$$

Distinguimos por tanto dos posibles casos:

CASO I: Si $m \neq \frac{24}{5}$.

En este caso el rango de la matriz propuesta será 3 ya que ninguna fila de la matriz se anularía completamente.

CASO II: Si $m = \frac{24}{5}$.

En este caso el rango de la matriz B será 2 ya que sólo una fila sería completamente nula tras la triangulación por el método de Gauss.

c) Para que una matriz cuadrada de orden n sea regular (o invertible) debe verificar que su rango sea n. Así pues, la matriz B propuesta en la actividad es invertible para cualquier valor real de m diferente de 24/5.

d) Calculemos la inversa de B mediante el método de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{bmatrix} F'_2 = F_2 - F_1 \\ F'_3 = F_3 - 2F_1 \end{bmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow [F'_3 = 5F_3 - 3F_2] \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -3 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \begin{bmatrix} F'_2 = F_2 + 2F_3 \\ F'_1 = F_1 - 3F_3 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 22 & 9 & -15 \\ 0 & -5 & 0 & -15 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -3 & 5 \end{array}\right) \rightarrow [F'_1 = 5F_1 + 2F_2] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 80 & 35 & -55 \\ 0 & -5 & 0 & -15 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -3 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \begin{bmatrix} F'_1 = \frac{1}{5}F_1 \\ F'_2 = -\frac{1}{5}F_2 \end{bmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 16 & 7 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -3 & 5 \end{array}\right)$$

Así pues, la inversa de la matriz propuesta es:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 16 & 7 & -11 \\ 3 & 1 & -2 \\ -7 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

e) Resolvamos ahora la ecuación propuesta:

$$XB + C^t = A^3 \;\rightarrow\; XB = A^3 - C^t \;\rightarrow\; XB \cdot B^{-1} = (A^3 - C^t) \cdot B^{-1} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; X = (A^3 - C^t) \cdot B^{-1}$$

Así pues:

$$X = (A^3 - C^t) \cdot B^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 16 & 7 & -11 \\ 3 & 1 & -2 \\ -7 & -3 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -10 & -4 & 7 \\ 15 & 4 & -10 \\ 13 & 6 & -9 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 3: ¿Qué significa que dos matrices A y B sean inversas una de la otra? **Demuestra** que cualquier matriz M (cuadrada de orden n) que verifica la relación $M^2 - 3M - I = 0$ tiene inversa (donde I denota la matriz identidad de orden n)

Se dice que dos matrices A y B son inversas entre sí si se verifica que:

$$A \cdot B = B \cdot A = I$$

Basándonos en esta definición de matriz inversa vamos a probar que toda matriz M (cuadrada de orden n) que verifica la relación $M^2 - 3M - I = 0$ tiene inversa. Para ello, simplemente basta con manipular adecuadamente la relación proporcionada:

$$M^2 - 3M - I = 0 \;\Rightarrow\; M^2 - 3M = I \;\Rightarrow\; M \cdot (M - 3I) = I$$

Así pues hemos encontrado una matriz (que es M-3I) que al multiplicarla por M me ha dado la identidad. Ello quiere decir que

$$M^{-1} = M - 3I$$

Y por tanto la matriz M tiene inversa.