4 Vectores en el espacio

Página 123

Diagonal de un ortoedro y volumen de un paralelepípedo

1 Diagonal = $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

2 Volumen = $a\ b\ c\ sen\ \alpha\ cos\ \beta$

Página 126

1 a) Producto de números por vectores:

$b \cdot \vec{v}$; $(a \cdot b) \cdot \vec{v}$; $a \cdot (b \cdot \vec{v})$

Producto entre números: $a \cdot b$

b) $\left.\begin{array}{l} a \cdot (b \cdot \vec{v}) = 3 \cdot (-2\vec{v}) \\ (a \cdot b) \cdot \vec{v} = -6\vec{v} \end{array}\right\} 3 \cdot (-2\vec{v}) = -6\vec{v}$

2 a) Suma de números: $a + b$

Suma de vectores: $a\vec{v} + b\vec{v}$

b) $\left.\begin{array}{l} (a + b) \cdot \vec{v} = 8\vec{v} \\ a\vec{v} + b\vec{v} = 3\vec{v} + 5\vec{v} \end{array}\right\} 8\vec{v} = 3\vec{v} + 5\vec{v}$

Página 128

1 a) (– 6, 10, 2) b) (0, 0, 0)

c) (3, –5, –1) d) (1, 14, 0)

e) (–10, 1, 3) f) (–36, 13, 11)

2 $a = 6$, $b = 2$, $c = 4$, es decir, $6\vec{x} - 2\vec{y} + 4\vec{z} = \vec{w}$.

Página 131

1 a) 60 b) $k = -\dfrac{25}{7}$

Página 133

2 a) –11

b) $|\vec{u}| = 5{,}48$; $|\vec{v}| = 3$

c) 132° 1' 26''

d) *Segmento proyección de* $\vec{u}$ *sobre* $\vec{v} = -3{,}67$

Vector proyección de $\vec{u}$ *sobre* $\vec{v} = (-1, 2, -2)$

Segmento proyección de $\vec{v}$ *sobre* $\vec{u} = -2{,}008$

Vector proyección de $\vec{v}$ *sobre* $\vec{u} = (5, -1, 2)$

e) $x = \dfrac{-33}{2}$

3 Por ejemplo: (0, –7, 2); (–7, 0, 3); (–2, 3, 0).

4 El vector buscado puede ser (–2, 8, 9) o cualquier otro paralelo a él.

Página 136

1 (–8, –18, –25)

2 (–8, –18, –25) o cualquier vector proporcional a él.

3 15,91 u^2

Página 137

1 53 u^3

2 $x = 0$

Página 138

1 Hazlo tú.

a) $\vec{u} = -\dfrac{1}{2}\vec{v} + 0\vec{w}$.

b) $-2\vec{u} = \vec{v}$, luego no pueden ser linealmente independientes los tres vectores.

2 Hazlo tú.

a) No son ortogonales.

b) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{14}}, \dfrac{2}{\sqrt{14}}, -\dfrac{3}{\sqrt{14}}\right)$

Página 139

3 Hazlo tú.

a) $m = 1$

b) Ningún par de los vectores dados son perpendiculares.

4 Hazlo tú.

$|\vec{u}| = 4$

$|\vec{v}| = 6$

Vector proyección = $\left(\dfrac{16}{9} - \dfrac{4}{9}\sqrt{3}, \dfrac{2}{9}\sqrt{3} - \dfrac{8}{9}, \dfrac{4}{9}\sqrt{3} - \dfrac{16}{9}\right)$

5 Hazlo tú.

$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{100 + 48\sqrt{2}}$

Página 140

1 $|\vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3| = \sqrt{25} = 5$

2 $m = 2$, $m = -2$

3 a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| cos\ 60° = a \cdot a \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}a^2$

Lo mismo ocurre con todos los productos.

b) $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) =$

$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^2 = 0$

Luego $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$.

4 a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \rightarrow$ Los vectores son L.I.

b) $\vec{d}\left(7, -\frac{13}{5}, \frac{14}{5}\right)$

5 a) (1, 1, 0) b) $\sqrt{2}$ u c) 2 u^2

Página 141

1 a) Hay dos vectores linealmente independientes.

b) $\vec{w} = \vec{u} + 2\vec{v}$

c) No se puede.

d) $m = -15$

2 $\vec{x} = a\vec{u} + b\vec{v} \rightarrow (3, -1, 0) = a(1, 2, -1) + b(2, -3, 5)$

$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

Como $|A'| = 28 \neq 0$, el sistema es *incompatible*.

ran $(A') = 3$, los tres vectores son linealmente independientes.

3 $\vec{a} = 2\vec{b} - 3\vec{c}$; $\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{c}$; $\vec{c} = \frac{-1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

4 a) Si $m = -2$, los vectores son linealmente dependientes.

b) Si $n = \frac{-5}{8}$, los vectores son linealmente dependientes.

5 A no es una base.

B no es una base.

C es una base de $\mathbb{R}^3$.

6 S es una base cuando $a \neq 0$ y $a \neq 1$.

7 a) 0 b) $|\vec{a}| = 3$; $|\vec{b}| \approx 7{,}07$ c) 90°

d) –41 e) (–16, –5, 13) f) $15\sqrt{2}$

g) 0 h) $\vec{0}$ (vector cero).

8 a) $m = -2$ b) $m = \frac{2}{5}$

9 (1, –1, 2)

10 $\vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0 \rightarrow$ no son ortogonales.

α = 84° 53' 20''

11 $m = \frac{5}{3}$

12 $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$. También podría ser $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

13 $\vec{u} \times \vec{v} = (-5, -5, 5)$; $\vec{u} \times \vec{v} = (5, 5, -5) = -\vec{u} \times \vec{v}$

$|\vec{u} \times \vec{v}| \approx 8{,}66$

14 33,66 u^2

15 $\left(\frac{-3}{\sqrt{91}}, \frac{-1}{\sqrt{91}}, \frac{9}{\sqrt{91}}\right)$

16 (–2, –2, 4)

17 a) 15 $\rightarrow$ El paralelepípedo tiene un volumen de 15 u^3.

b) –15 $\rightarrow$ El paralelepípedo tiene un volumen de 15 u^3.

c) 0 $\rightarrow$ Los tres vectores no forman un paralelepípedo (los vectores son coplanarios).

18 70 u^3

$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = |(\vec{u} \times \vec{v})|^2$

19 18,5 u^3

20 $m = -4$

Página 142

21 a) $m = 1$ b) $m \neq -4$ c) $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

22 $\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ para cualquier valor de a, b, c.

23 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (2, 5, -1) \cdot (3, -1, 1) = 0$.

$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (0, -1, -1) \cdot (3, -1, 1) = 0$.

24 a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Luego $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares, y el paralelogramo es un rectángulo.

b) Área ≈ 29,22 u^2

$|\vec{u} \times \vec{v}| \approx 29{,}22$ u^2

25 a) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$

b) $(-\sqrt{6}, \sqrt{6}, -2\sqrt{6})$ y $(\sqrt{6}, -\sqrt{6}, 2\sqrt{6})$

26 $(2, -1, 1)$

27 $a = b$

28 $\vec{u}\left(\frac{5}{2}, 1, \frac{-3}{2}\right)$

29 a) Para $a = 1$ y para $a = -2$, los tres vectores dados son linealmente dependientes.

b) Para $a = 1$: $-1 \cdot (-2, 1, 1) - 1 \cdot (1, -2, 1) = (1, 1, -2)$

Para $a = -2$:

$1 \cdot (-2, -2, -2) + 0 \cdot (-2, -2, -2) = (-2, -2, -2)$

30 a) $a = 0$, $a = 1$

b) Para $a = 2$, los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes. Así, cualquier otro vector, y, en particular $\vec{c}\,(1, 2, 3)$, depende linealmente de ellos.

c) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$ para $a = 1$. Está probado en el apartado a).

31 a) $k = 0$ b) $k = 1$ c) $k = \frac{1}{9}$

32 a) Hay tres vectores linealmente independientes en S.

b) $\vec{u} = k \cdot (1, 1, 1) + 0 \cdot (0, 2, 1)$

c) $\vec{v}\,(1, 1, -1)$

33 Hay dos soluciones: $(\sqrt{5}, -2\sqrt{5}, 3\sqrt{5})$ y $(-\sqrt{5}, 2\sqrt{5}, -3\sqrt{5})$.

34 $(-3\lambda, 2\lambda, \lambda)$ $(\lambda \neq 0)$

35 $|\vec{a} + \vec{b}| = 2\sqrt{7}$; $|\vec{a} - \vec{b}| = 2\sqrt{3}$

36 $|\vec{u} + \vec{v}| \approx 11{,}66$; $|\vec{u} - \vec{v}| \approx 11{,}66$

37 61° 26' 21''

38 -45

39 No. Por ejemplo, si $\vec{u}\,(3, -2, 0)$, $\vec{v}\,(5, 1, 0)$ y $\vec{w}(7, 4, 0)$, tenemos que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$, sin embargo, $\vec{v} \neq \vec{w}$.

40 $\vec{a} \cdot (m\vec{b} + n\vec{c}) = m\vec{a} \cdot \vec{b} + n\vec{a} \cdot \vec{c} = m \cdot 0 + n \cdot 0 = 0$. Por tanto, $\vec{a} \perp (m\vec{b} + n\vec{c})$.

41 a) No existen dos vectores que cumplan estas condiciones.

b) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección.

Página 143

42 a) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (-7, 1, 3)$

$\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} = (-7, 1, 3)$

b) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (8, -9, 16)$

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (11, 1, -3)$

43 No. Por ejemplo, $\vec{a}(1, 2, 3)$, $\vec{b}(2, 4, 6)$ y $\vec{c}(3, 6, 9)$.

44 $[\vec{a} + \vec{c}, \vec{a} - \vec{c}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}] = 1 \neq 0$. Son L.I.

$[\vec{a} + \vec{c}, \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}] = -1 \neq 0$. Son L.I.

$[\vec{a} - \vec{c}, \vec{c} - \vec{b}, \vec{b} - \vec{a}] = 0$. Son L.D.

45 a) Tiene infinitas soluciones, luego es verdadero.

Los vectores son de la forma: $\lambda(19, -21, -10)$.

b) $|\vec{a} + \vec{b}| = 7 \rightarrow$ es falso.

c) Falso, como se ve en el ejercicio 42 b) de esta sección.

d) Verdadero.

Ejemplo: $\vec{a}\,(1, 0, 0) \rightarrow |\vec{a}| = 1$; $\frac{3}{1}\vec{a} = (3, 0, 0)$

e) Falso, $k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v}$

f) Verdadero.

Ejemplo: $a(1, 0, 0)$; $b(0, 1, 0) \rightarrow$

$\rightarrow 2a - 3b = (2, -3, 0)$ $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0$

g) Verdadero, puesto que si $\vec{u} \cdot \vec{v} = -|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \rightarrow -1 = $ $= cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \rightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 180°$, tienen la misma dirección y sentidos opuestos.

h) Falso, como se ha visto en el ejercicio 43 de esta sección.

46 a) $\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{BC}$; y, como AH_A es la altura correspondiente al lado BC, entonces:

$\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AH_A} \rightarrow \overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{HA} \rightarrow \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \overrightarrow{HA} \cdot (\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HB}) = 0$

Análogamente, como $\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{AC}$, tenemos que: $\overrightarrow{HB} \cdot (\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA}) = 0$

b) $\overrightarrow{HC} \cdot (\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HA}) = \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HA} =$

$= \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC} =$

$= \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} =$

$= \overrightarrow{HB} \cdot (\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA}) = 0$

Por consiguiente, si $\overrightarrow{HC} \cdot (\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HA}) = 0$, dado que $\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{AB}$, entonces $\overrightarrow{HC} \perp \overrightarrow{AB}$; luego H también pertenece a la altura correspondiente al vértice C. Así, las tres alturas se cortan en el mismo punto, H.

47 $a = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$

Autoevaluación

1 a) $a = 0,\ b = 0,\ c = 0$

b) Sí, porque son tres vectores y son linealmente independientes.

c) $\vec{r} = -\frac{1}{5}(1, -1, 0) + \frac{4}{5}(0, 1, 2) - \frac{3}{5}(-2, 0, 1)$

2 $|\vec{u}| = 4$

$|\vec{v}| = 6$

$\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = 67° \ 47' \ 26''$

Vector proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$: $\frac{4 - \sqrt{3}}{9}(4, -2, -4)$

3 a) $m = 0$

b) $\vec{w} = (-28, -21, 0)$

c) $\vec{u}' = \frac{1}{5}(3, -4, 0)$; $\vec{v}' = \frac{1}{7}(0, 0, 7)$; $\vec{w}' = \frac{1}{35}(-28, -21, 0)$

d) Por ser perpendiculares entre sí y, además, unitarios, la base $(\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}')$ es ortonormal.

4 a) $b \neq 6$; $a = \frac{-3}{6 - b}$

b) $b = \frac{11}{3}$

5 $m = -\frac{24}{5},\ m = 0$

6 $\left(\sqrt{\frac{15}{2}}, 3\sqrt{\frac{15}{2}}, 5\right)$ y $\left(-\sqrt{\frac{15}{2}}, -3\sqrt{\frac{15}{2}}, 5\right)$

7 $m = 3,\ m = -2$