PROBLEMA 1: Considera las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) **Comprueba** que la matriz A verifica la relación $A^2 - 3A + 2I = 0$
b) Demuestra que la matriz A es **regular** y calcula su inversa.
c) **Determina los valores reales** de α y β que verifican que $A^3 = \alpha A + \beta I$
d) Calcula (si existe) la **inversa** de las matrices B y C.
e) **Determina** la matriz X que verifica $AXC - B^{10} = B^T$

a) Comprobaremos que se verifica la relación propuesta. Para ello necesitaremos calcular primeramente la matriz A^2:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 30 \\ 0 & -9 & 19 \end{pmatrix}$$

Así pues:

$$A^2 - 3A + 2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 30 \\ 0 & -9 & 19 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 30 \\ 0 & -9 & 21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Con lo que queda demostrado que la matriz A cumple la relación $A^2 - 3A + 2I = 0$

b) Para demostrar que A es regular (es decir, que posee inversa) podemos hacerlo de diversas formas. Una de ellas consiste en utilizar la relación que aparece en el apartado anterior. Dado que hemos visto que $A^2 - 3A + 2I = 0$, entonces:

$$A^2 - 3A + 2I = 0 \quad \rightarrow \quad 2I = 3A - A^2 \quad \rightarrow \quad 2I = A \cdot (3I - A) \quad \rightarrow \quad I = A \cdot \left[\frac{1}{2}(3I - A)\right]$$

De donde se deduce directamente que la matriz A es regular ya que hemos encontrado una matriz (que al multiplicarla por A nos proporciona la matriz identidad. Así pues:

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(3I - A)$$

Y esta expresión permite calcular fácilmente **la matriz inversa de A**:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -10 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7/2 & -5 \\ 0 & 3/2 & -2 \end{pmatrix}$$

c) Utilizando la relación que cumple la matriz A y que hemos visto en el apartado a), podemos escribir que:

$$A^2 - 3A + 2I = 0 \quad \rightarrow \quad A^2 = 3A - 2I$$

Así pues, si calculamos ahora la matriz A^3:

$$A^3 = A \cdot A^2 = A \cdot (3A - 2I\ ) = 3A \cdot A - 2I \cdot A = 3A^2 - 2A$$

Usando nuevamente el hecho de que $A^2 = 3A - 2I$, obtenemos que:

$$A^3 = 3A^2 - 2A = 3 \cdot (3A - 2I) - 2A = 9A - 6I - 2A = 7A - 6I$$

Por lo tanto, los valores reales de α y β que verifican que $A^3 = \alpha A + \beta I$ son $\boldsymbol{\alpha = 7}$ **y** $\boldsymbol{\beta = -6}$

d) Antes de calcular las matrices inversas, vamos a comprobar si tienen inversa. Comencemos por la matriz B. Se observa que la matriz B tiene una fila completa de ceros, por lo que el rango de la matriz B no es 3. Ello nos lleva a concluir ya (directamente) que no es regular y por tanto no tiene matriz inversa.

En el caso de la matriz C, utilizaremos el método de Gauss-Jordan para determinar su rango al mismo tiempo que calculamos la matriz inversa (si existe):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F2 \leftrightarrow F3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F2'=F2-5F1 \\ F3'=F3-5F1}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Llegados a este punto, ya podemos observar que el rango de C es 3 (porque al finalizar el proceso de escalonamiento de Gauss, no hay ninguna fila completamente nula). Así pues, la matriz C sí tiene inversa y continuando el proceso de Gauss-Jordan, podremos obtener la inversa:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F2'=F2-4/5F3 \\ F1'=F1+1/5F3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & -4/5 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{F2'=1/3F2 \\ F3'=-1/5F3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & -4/15 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1/5 & 0 \end{array}\right)$$

Así pues:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/5 & 0 \\ -1/3 & -4/15 & 1/3 \\ 1 & -1/5 & 0 \end{pmatrix}$$

e) Considerando la ecuación propuesta, podemos ver que:

$$AXC - B^{10} = B^T \quad \rightarrow \quad AXC = B^T + B^{10} \quad \rightarrow \quad A^{-1}AXCC^{-1} = A^{-1}(B^T + B^{10})C^{-1}$$

Así pues:

$$X = A^{-1}(B^T + B^{10})C^{-1}$$

Las matrices inversas de A y C ya las hemos calculado anteriormente, por lo que solo quedaría obtener la matriz B^{10} antes de calcular la matriz X:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así pues, observamos que a partir de la potencia B^3, el resultado es siempre la matriz nula. Por tanto $B^{10} = 0$

Esto nos permite ya, calcular la matriz X:

$$X = A^{-1}(B^T + B^{10})C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7/2 & -5 \\ 0 & 3/2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{4}{15} & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 13 & -10 & 0 \\ 5 & -4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{4}{15} & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{10}{3} & \frac{79}{15} & -\frac{10}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{31}{15} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 2: Considera las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Se pide calcular el valor de los siguientes determinantes:

a)	$\lvert A\rvert$	c)	$\lvert C\rvert$	e)	$\lvert A+B\rvert$	g)	$\lvert B^T\cdot A^2\rvert$	i)	$\lvert A^T\cdot C\cdot A^{-1}\rvert$
b)	$\lvert B\rvert$	d)	$\lvert A\cdot C\rvert$	f)	$\lvert C^3\rvert$	h)	$\lvert -2A\rvert$	j)	$\left\lvert \frac{1}{3}C\cdot C^T\right\rvert$

Calculemos los determinantes que piden en cada apartado. Para ello, usaremos (siempre que sea posible y para facilitar el cálculo, las **propiedades de los determinantes**):

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (1+0-6)-(-1+0+10) = -5-9 = -14$

b) Dado que la matriz B es una matriz triangular superior, sabemos que su determinante equivale al producto de los elementos de la diagonal principal:

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

c) La matriz C es una matriz triangular inferior y, por tanto, su determinante equivale al producto de los elementos de la diagonal principal:

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = 1\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 3$$

d) Usando las propiedades de los determinantes:

$$|A\cdot C| = |A|\cdot|C| = -14\cdot 3 = -42$$

e) En esta ocasión, no hay ninguna propiedad de determinantes que me permita calcular $|A+B|$ sin hacer la suma de las matrices:

$$|A+B| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}\right| = -16$$

f) Usando las propiedades de los determinantes:

$$|C^3| = |C|^3 = 3^3 = 27$$

g) Dado que una matriz y su traspuesta tienen el mismo determinante:

$$|B^T \cdot A^2| = |B^T| \cdot |A^2| = |B| \cdot |A|^2 = -6 \cdot (-14)^2 = -1176$$

h) En esta ocasión, usaremos la propiedad de los determinantes $|kA| = k^n|A|$ siendo n el orden de la matriz cuadrada A.

$$|-2A| = (-2)^3|A| = -8 \cdot (-14) = 112$$

i) Sabiendo que el determinante de una matriz y su inversa tienen una relación inversa:

$$|A^T \cdot C \cdot A^{-1}| = |A^T| \cdot |C| \cdot |A^{-1}| = |A| \cdot |C| \cdot \frac{1}{|A|} = |C| = 3$$

j) Usando las propiedades ya comentadas en apartados previos:

$$\left|\frac{1}{3}C \cdot C^T\right| = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot |C| \cdot |C^T| = \frac{1}{27} \cdot 3 \cdot 3 = \frac{1}{3}$$

PROBLEMA 3: **Determina si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas**. En caso de ser verdadera proporciona una demostración y en caso de ser falsa propón un ejemplo donde se aprecie la falsedad de la proposición.

a) Una matriz cuadrada A de orden n y A^2 siempre poseen el mismo rango.
b) Dadas dos matrices cuadradas A y B se cumple que $|A+B| = |A| + |B|$
c) La suma de dos matrices simétricas es siempre otra matriz simétrica.

a) **Falso**. Basta considerar el siguiente ejemplo:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ cuyo rango es 2

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ cuyo rango es 1

b) **Falso**. Basta considerar el siguiente caso:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Se observa fácilmente que:

$$|A+B| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right| = 0$$
$$|A| + |B| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\right| = 2 + 2 = 4$$

ambos valores son diferentes.

c) **Verdadero**. Vamos a realizar una demostración formal. Supongamos que tenemos dos matrices simétricas A y B. Como son simétricas sabemos que cumplirán:

$$A = A^T \text{ y } B = B^T$$

Ahora debemos comprobar que A+B es simétrica. Para ello, debemos ver si se cumple la condición de matriz simétrica, es decir, debemos ver si:

$$A + B = (A+B)^T$$

Usando las propiedades de la trasposición:

$$(A+B)^T = A^T + B^T = [como\ A\ y\ B\ son\ simétricas] = A + B$$

Con lo que queda demostrado.