DOSSIER SEMANAL 01

MATEMÁTICAS II

Por Pedro A. Martínez

PROBLEMA 1: Considera las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -3\\ 0 & -3 & 2\end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix}2\\ 5\\ -1\end{pmatrix}$$

$$E=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 3\end{pmatrix} \quad F=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ -2 & 0 & -4\\ -1 & 4 & 0\end{pmatrix} \quad G=\begin{pmatrix}2 & -1 & -2\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad H=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

a) **Clasifica cada una de las matrices** anteriores atendiendo a la tipología básica estudiada en clase (*matriz fila, columna, cuadrada, rectangular, simétrica, anti-simétrica, diagonal, escalar o triangular*)

b) **Calcula**, cuando sea posible, las siguientes operaciones con matrices:

1)	$2C+3G$	4)	$G\cdot A$	7)	$B\cdot(2A+C)$
2)	$-4B+7H$	5)	$E\cdot D$	8)	B^3
3)	$-E+5D^T$	6)	$H\cdot B$	9)	$F^2\cdot A+2E^T$

a) La clasificación que podríamos realizar es la siguiente:

A es una matriz cuadrada de orden 3 y triangular superior.

B es una matriz rectangular de dimensión 2 x 3.

C es una matriz cuadrada de orden 3 simétrica.

D es una matriz columna.

E es una matriz fila.

F es una matriz cuadrada de orden 3 anti-simétrica.

G es una matriz cuadrada de orden 3.

H es una matriz cuadrada de orden 2, diagonal, escalar y simétrica.

Pedro A. Martínez Ortiz
www.maths4everything.com
@maths4everthink

b) Realicemos, a continuación, las operaciones matriciales indicadas siempre que sea posible:

1) $$2C+3G=2\cdot\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&-3\\0&-3&2\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}2&-1&-2\\1&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&0\\2&2&-6\\0&-6&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6&-3&-6\\3&3&0\\6&0&3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}8&-1&-6\\5&5&-6\\6&-6&7\end{pmatrix}$$

2) $-4B+7H$ *No puede realizarse porque las dimensiones de B y H son diferentes.*

3) $$-E+5D^T=-\begin{pmatrix}-3&1&3\end{pmatrix}+5\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}3&-1&-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}10&25&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&24&-8\end{pmatrix}$$

4) $$G\cdot A=\begin{pmatrix}2&-1&-2\\1&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&2&1\\0&3&2\\0&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&1&-6\\3&5&3\\6&4&5\end{pmatrix}$$

5) $$E\cdot D=\begin{pmatrix}-3&1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6+5-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\end{pmatrix}$$

6) $$H\cdot B=\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3&-3\\3&0&0\end{pmatrix}$$

7) $$B\cdot(2A+C)=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}\cdot\left[2\cdot\begin{pmatrix}3&2&1\\0&3&2\\0&0&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&-3\\0&-3&2\end{pmatrix}\right]=$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}6&4&2\\0&6&4\\0&0&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&-3\\0&-3&2\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7&5&2\\0&7&1\\0&-3&8\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}7&15&-5\\7&5&2\end{pmatrix}$$

8) B^3 *No puede realizarse porque la matriz B no es cuadrada*

9) $F^2\cdot A+2E^T$

No puede realizarse ya que el resultado de $F^2\cdot A$ es una matriz cuadrada de orden 3. Dado que la dimensión de ésta no coincide con la dimensión de $2E^T$, la suma final no puede efectuarse.

PROBLEMA 2: **Calcula**, razonadamente la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$ siendo $n \in N$.

Calcularemos las primeras potencias para ver si existe alguna pauta clara que podamos sintetizar de forma matemática:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & 0 \\ 16 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

Así pues, observamos que los términos ubicados en las esquinas de la matriz siguen una progresión geométrica de razón 2. De tal forma que podemos generalizar la potencia enésima como sigue:

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

Demostremos por inducción sobre n que ciertamente es así:

PASO I: Vemos que se cumple para *n =1*: $A^1 = \begin{pmatrix} 2^0 & 0 & 2^0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^0 & 0 & 2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

PASO II: Supongamos que la hipótesis es cierta para un valor genérico $k \in N$:

$$A^k = \begin{pmatrix} 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \end{pmatrix}$$

PASO III: Ahora debemos demostrar que se cumple la fórmula para $k+1$. Es decir, que cuando calculemos A^{k+1} se obtenga:

$$A^{k+1} = \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 2^k \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^k & 0 & 2^k \end{pmatrix}$$

Comprobémoslo:

$$A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{k-1}+2^{k-1} & 0 & 2^{k-1}+2^{k-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{k-1}+2^{k-1} & 0 & 2^{k-1}+2^{k-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2^{k-1} & 0 & 2 \cdot 2^{k-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 \cdot 2^{k-1} & 0 & 2 \cdot 2^{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{k-1+1} & 0 & 2^{k-1+1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{k-1+1} & 0 & 2^{k-1+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 2^k \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^k & 0 & 2^k \end{pmatrix}$$

Así pues, con ello, queda demostrado que la potencia n-ésima de la matriz propuesta es: $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$

PROBLEMA 3: ¿Qué es el rango de una matriz? A continuación, calcula razonadamente el rango de la siguiente matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

El rango de una matriz es el número de filas (columnas) que tiene dicha matriz y son linealmente independientes.

Una de las formas que tenemos para averiguar el rango de una matriz se basa en la aplicación del método de Gauss y tras ello, analizar cuántas filas linealmente independientes tenemos. Más adelante, estudiaremos otro modo de averiguar el rango de una matriz.

Calculemos ahora la inversa de la matriz A utilizando el método de Gauss-Jordan:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -6 \end{pmatrix} \overset{\substack{F2'=F2-3F1 \\ F3'=F3+2F1}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -8 \end{pmatrix} \overset{F3'=F3+2F2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así pues, dado que la matriz obtenida tras las transformaciones elementales posee dos filas no nulas, podemos asegurar que el rango de la matriz propuesta es 2.