Página 89

Los fardos de cereal

$x = \dfrac{39 - 2y - z}{3} = \dfrac{37}{4}$, $y = \dfrac{24 - z}{5} = \dfrac{17}{4}$, $z = \dfrac{99}{36} = \dfrac{11}{4}$

Página 91

1 a) Verdadero b) Falso. c) Verdadero.

d) Verdadero. e) Verdadero

2 a) Hemos sustituido la segunda ecuación por el resultado de sumar las dos que teníamos.

b) Hemos sustituido la primera ecuación por el resultado de restarle a la segunda ecuación la primera.

c) En el primer sistema, la tercera ecuación se obtiene sumando las dos primeras. El resto es igual que en b).

d) Hemos sustituido la segunda ecuación por el resultado de restarle a la segunda ecuación la primera.

Página 93

1 a) $x = -2$, $y = 5$. Son tres rectas que se cortan en el punto $(-2, 5)$.

b) $x = 5 - 2\lambda$, $y = 1 + \lambda$, $z = \lambda$. Son tres planos que se cortan en una recta.

c) El sistema es incompatible. Los dos primeros planos son paralelos y el tercero los corta.

d) $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$. Son tres planos que se cortan en el punto $(3, 2, 1)$.

2 a) $x = \dfrac{11}{3}$, $y = \dfrac{-1}{3}$

b) Por ejemplo: $2x + y = 7$ (suma de las dos anteriores)

c) Por ejemplo: $2x + y = 9$

d) En a) $\to$ Son dos rectas que se cortan en $\left(\dfrac{11}{3}, \dfrac{-1}{3}\right)$.

En b) $\to$ La nueva recta también pasa por $\left(\dfrac{11}{3}, \dfrac{-1}{3}\right)$.

En c) $\to$ No existe ningún punto común a las tres rectas. Se cortan dos a dos.

Página 94

1 a) $x = \dfrac{7}{3}$, $y = \dfrac{-4}{3}$

b) $x = 3$, $y = -29$, $z = 11$

c) $x = 3 + \lambda$, $y = -29 - 19\lambda$, $z = 11 + 6\lambda$, $t = \lambda$

d) $x = 1$, $y = \dfrac{16}{9}$, $z = \dfrac{-2}{3}$

2 a) $x = 0$, $y = 1/2$, $z = 0$

b) $x = 2 + \lambda$, $y = 5 - 3\lambda$, $z = 2\lambda$

c) $x = 2 + \lambda$, $y = \lambda$, $z = 1 - 2\lambda$

d) $x = 2$, $y = 5$, $z = 1$, $t = 2$

Página 95

3 a) $x = 3$, $y = -5$

b) $x = 1$, $y = 2$, $z = -1$

c) $x = 1$, $y = 5 - \lambda$, $z = \lambda$

d) $x = 1$, $y = 10$, $z = 3$, $w = 0$

Página 96

1 a) Falso.

b) Verdadero.

Página 98

2 a) $x = 1$, $y = -2$, $z = 3$

b) El sistema es *incompatible*.

c) $x = -3 + 2\lambda$, $y = \lambda$, $z = -2 + \lambda$

3 a) $x = \dfrac{9}{2} - 7\lambda$, $y = \dfrac{5}{2} - 3\lambda$, $z = 2\lambda$

b) $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $w = 0$

c) $x = \dfrac{-3}{4}$, $y = \dfrac{11}{4}$, $z = \dfrac{69}{4}$, $w = \dfrac{53}{4}$

Página 99

1 a) • Si $k = 3$, el sistema es *incompatible indeterminado*.

$x = \dfrac{3}{4} - \lambda$, $y = 2\lambda$, $z = \dfrac{-5}{4} + \lambda$

• Si $k \neq 3$, es *compatible determinado*.

$x = -1$, $y = 2 + \dfrac{k}{2}$, $z = -1 + \dfrac{k}{2}$

b) • Si $k = 3$, el sistema es *incompatible*.

• Si $k \neq 3$, es *compatible determinado*.

$x = \dfrac{2 - k}{k - 3}$, $y = \dfrac{k^2 + k - 8}{2k - 6}$, $z = \dfrac{k^2 - 5k + 8}{2k - 6}$

2 a) • Si $k = -3$, el sistema es *incompatible*.

• Si $k \neq -3$, es *compatible determinado*.

b) • Si $k = -1$, el sistema es *incompatible*.

• Si $k \neq -1$, es *compatible determinado*.

28

Página 101

1 a) El sistema es *compatible.*

b) El sistema es *incompatible.*

c) El sistema es *incompatible.*

2 a) El sistema es *compatible.*

b) El sistema es *incompatible.*

c) El sistema es *compatible.*

Página 102

1 Si $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$

Su solución es: $x = \frac{|A_x|}{|A|}$, $y = \frac{|A_y|}{|A|}$, $z = \frac{|A_z|}{|A|}$

2 $x = 7$, $y = 2$, $z = -5$

Página 103

3 Tenemos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = c_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = c_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = c_3 \end{array}\right\}, \text{ con } |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

Hemos de despejar cada una de las incógnitas. Empecemos por la x.

Para despejar x, hemos de eliminar y, z. Esto se consigue multiplicando las tres ecuaciones, que llamamos (1), (2), (3), por los adjuntos de los coeficientes de la x:

$(1) \cdot A_{11} \to a_{11} A_{11}x + a_{12} A_{11}y + a_{13} A_{11}z = c_1 A_{11}$

$(2) \cdot A_{21} \to a_{21} A_{21}x + a_{22} A_{21}y + a_{23} A_{21}z = c_2 A_{21}$

$(3) \cdot A_{31} \to a_{31} A_{31}x + a_{32} A_{31}y + a_{33} A_{31}z = c_3 A_{31}$

Sumando, obtenemos una igualdad que vamos a analizar por partes:

- El coeficiente de la x es:

  $a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + a_{31} A_{31} = |A|$

- El coeficiente de la y es $a_{12} A_{11} + a_{22} A_{21}y + a_{32} A_{31} = 0$

  Análogamente, se ve que el coeficiente de z es cero.

- El término independiente es $c_1 A_{11} + c_2 A_{21} + c_3 A_{31}$, que es el determinante de la matriz A_x que resulta al sustituir en A la columna de los coeficientes de x por la columna de los términos independientes:

  $$A_x = \begin{pmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Recapitulamos: al sumar $(1) \cdot A_{11} + (2) \cdot A_{21} + (3) \cdot A_{31}$, obtenemos:

$$|A|x + 0y + 0z = |A_x|$$

Puesto que $|A| \neq 0$, podemos despejar la x, y obtenemos:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|}$$

Para despejar la y habría que multiplicar las ecuaciones (1), (2), (3) por A_{12}, A_{22}, A_{32}, respectivamente. Y análogamente procederíamos para despejar z, obteniéndose:

$$y = \frac{|A_y|}{|A|}, \quad z = \frac{|A_z|}{|A|}$$

Página 105

1 a) $x = 1 + \lambda$, $y = 7\lambda$, $z = 2\lambda$

b) El sistema es *incompatible.*

c) $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$

d) El sistema es *incompatible.*

Página 106

1 a) El sistema solo tiene la solución trivial: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

b) $x = -\lambda$, $y = -2\lambda$, $z = \lambda$

c) El sistema solo tiene la solución trivial: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

d) $x = \lambda$, $y = -\lambda$, $z = 0$, $t = 2\lambda$

2 a) $x = -5\lambda$, $y = -\lambda$, $z = \lambda$

b) $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

c) $x = -3\lambda$, $y = \lambda$, $z = \lambda$, $t = \lambda$

d) $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $t = 0$

Página 108

1 a) • Si $a = 2$, el sistema es *incompatible.*

• Si $a = -\frac{3}{4}$, el sistema es *incompatible.*

• Si $a \neq 2$ y $a \neq -\frac{3}{4}$, el sistema es *compatible determinado*. Su solución es:

$$x = \frac{6 - 4a}{4a^2 - 5a - 6}, \; y = \frac{a - 6}{4a^2 - 5a - 6}, \; z = \frac{3}{4a^2 - 5a - 6}$$

b) • Si $k = 2$, el sistema es *compatible determinado.*

Solución: $x = 5$, $y = -3$

• Si $k = \frac{5}{3}$, el sistema es *compatible determinado.*

Solución: $x = \frac{11}{2}$, $y = \frac{-23}{6}$

• Si $k \neq 2$ y $k \neq \frac{5}{3}$, el sistema es *incompatible.*

2 • Si $a = 0$, el sistema es *compatible indeterminado*.

Soluciones: $x = \lambda,\ y = \lambda$

• Si $a = 1$, el sistema es *compatible indeterminado*.

Soluciones: $x = \lambda,\ y = 0$

• Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$, el sistema tiene solo la solución trivial: $x = 0,\ y = 0$

Página 109

1 a) $$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B}$$

Solución: $x = 106,\ y = 64,\ z = 36$

b) $$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}_{B} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}}_{C}$$

Solución: $x = 1,\ y = -5$

2 a) $$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{B}$$

Solución: $x = 1,\ y = 0,\ z = 2,\ t = -5$

b) $$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}}_{B}$$

Solución: $x = 8,\ y = -3,\ z = 2,\ t = 2$

Página 110

1 Hazlo tú.

a) • Si $m \neq 1$, el sistema es *compatible determinado*.

Solución: $x = -1,\ y = 0,\ z = 1$

• Si $m = 1$, el sistema es *compatible indeterminado*.

Soluciones: $x = 2 - 3\lambda,\ y = 4 - 4\lambda,\ z = \lambda$

b) • Si $a \neq 2$, el sistema es *compatible determinado*.

Solución: $x = 3,\ y = -\dfrac{3a - 4}{a - 2},\ z = \dfrac{2}{a - 2}$

Página 111

2 Hazlo tú.

a) • Si $a \neq 2$ y $a \neq -1$, el sistema es *compatible determinado*.

Solución: $x = a + 1,\ y = \dfrac{2 - a}{a - 1},\ z = -\dfrac{a}{a - 1}$

• Si $a = -1$, el sistema es *incompatible*.

• Si $a = 2$, el sistema es *compatible indeterminado*.

Solución: $x = 1 - \lambda,\ y = 0,\ z = \lambda$

b) • Si $m \neq 1$, el sistema es *incompatible*.

• Si $m = 1$, el sistema es *compatible determinado*:

Solución: $x = 2,\ y = 1,\ z = 1$

Página 112

3 Hazlo tú.

• Si $m \neq 1$, el sistema es *compatible determinado*.

Solución: $x = n - 2,\ y = \dfrac{n - m^2 n + mn + 2m^2 - 4}{m - 1},$

$z = -\dfrac{2m + 2n - mn - 4}{m - 1}$

• Si $m = 1$ y $n = 2$, el sistema es *compatible indeterminado*.

Solución: $x = 0,\ y = 2 - \lambda,\ z = \lambda$

• Si $m = 1$ y $n \neq 2$, el sistema es *incompatible*.

4 Hazlo tú.

• Si $a \neq 10$, el sistema es *compatible determinado*.

Tenemos un sistema con solución única: (0, 0, 0).

• Si $a = 10$, el sistema es *compatible indeterminado*.

Soluciones: $x = 2\lambda,\ y = -\lambda,\ z = \lambda$

5 Hazlo tú.

• Si $a \neq 4$, el sistema es *compatible indeterminado*.

Solución: $x = 0,\ y = \lambda - 1,\ z = \lambda,\ t = -1$

• Si $a = 4$, el sistema es *compatible indeterminado*.

Soluciones: $x = \dfrac{1}{4}\mu + \dfrac{1}{4},\ y = \lambda - \dfrac{3}{4}\mu - \dfrac{7}{4},\ z = \lambda,\ t = \mu$

Página 113

1 $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2 Si S es compatible indeterminado significa que la columna de términos independientes es linealmente dependiente de las columnas de los coeficientes.

3 a) • Si $a \neq -1$, el sistema es *compatible determinado*, tiene solución única.

• Si $a = -1$, el sistema es *compatible indeterminado*, tiene infinitas soluciones. Es *compatible* para cualquier valor de a.

b) $X = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ c) $x = -3,\ y = 1,\ z = 5$

4 a) $3x + z = 5$ b) $5x - 4y = 0$ c) $3x + z = 4$

Página 114

1 a) $x = -1,\ y = 1,\ z = 8$

b) $x = \frac{1}{5} - 3\lambda,\ y = \frac{7}{5} - \lambda,\ z = 5\lambda$

c) El sistema es *incompatible.*

d) $x = \lambda,\ y = 3\lambda,\ z = 7\lambda$

2 a) Sistema *compatible determinado*.

Solución: $x = \frac{3}{2},\ y = -\frac{1}{2},\ z = 0$

b) Sistema *compatible indeterminado*.

Soluciones: $x = 1 + \lambda,\ y = \lambda,\ z = -1 - \lambda$

c) Sistema *compatible determinado*.

Solución: $x = 1,\ y = 1,\ z = -1$

d) Sistema *compatible indeterminado*.

Soluciones: $x = \lambda,\ y = \lambda,\ z = 0,\ t = 0$

3 a) $x = -3,\ y = 6,\ z = 7$

b) $x = -1,\ y = 1,\ z = \frac{3}{2},\ t = -\frac{1}{2}$

4 a) • Si $m = 4 \rightarrow$ Sistema *compatible determinado*.

• Si $m \neq 4 \rightarrow$ Sistema *incompatible*.

b) Sistema *compatible determinado* para todo m.

c) • Si $m = 0 \rightarrow$ Sistema *incompatible*.

• Si $m \neq 0 \rightarrow$ Sistema *compatible determinado*.

d) • Si $m = 5 \rightarrow$ Sistema *compatible indeterminado*.

• Si $m \neq 5 \rightarrow$ Sistema *compatible determinado* con *solución* $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

5 a) • Si $m = -\frac{1}{2} \rightarrow$ Sistema *compatible indeterminado*.

Soluciones: $x = \lambda,\ y = 2\lambda - 4$

• Si $m \neq -\frac{1}{2} \rightarrow$ Sistema *compatible determinado*.

Solución: $x = 2,\ y = 0$

b) • Si $m = 10 \rightarrow$ Sistema *compatible indeterminado*.

Soluciones: $x = 1 + \lambda,\ y = -1 + 3\lambda,\ z = 5\lambda$

• Si $m \neq 10 \rightarrow$ Sistema *incompatible*.

c) • Si $m = 7 \rightarrow$ Sistema *compatible determinado*.

Solución: $x = 1,\ y = 1$

• Si $m \neq 7 \rightarrow$ Sistema *incompatible*

d) • Si $m = -1 \rightarrow$ Sistema *compatible indeterminado*.

Soluciones: $x = 1 - \lambda,\ y = -1 - 7\lambda,\ z = 3\lambda$

• Si $m \neq -1 \rightarrow$ Sistema *incompatible*.

6 a) *ran* (A) = *ran* (A') = 2 = *n.º de incógnitas*.

El sistema es *compatible determinado*.

b) *ran* (A') = 3 ≠ *ran* (A) = 2

El sistema es *incompatible*.

c) *ran* (A') = 2 = *ran* (A) < *n.º de incógnitas*.

El sistema es *compatible indeterminado*.

d) *ran* (A') = 3 ≠ *ran* (A) = 2

El sistema es *incompatible*.

e) *ran* (A) = *ran* (A') = 3 = *n.º de incógnitas*.

El sistema es *compatible determinado*.

f) *ran* (A) = *ran* (A') = 3 = *n.º de incógnitas*.

El sistema es *compatible determinado*.

7 a) $x = 2,\ y = -1$

b) $x = \frac{3 + \lambda}{2},\ y = \frac{-1 - \lambda}{2},\ z = \lambda,\ t = \lambda$

c) $x = -1,\ y = -5,\ z = 7$

d) $x = 3,\ y = -1 - \lambda + \mu,\ z = \lambda,\ t = \mu$

8 a) *ran* (A) = *ran* (A') = 3 = *n.º de incógnitas*.

El sistema es *compatible determinado*.

Solución: $x = \frac{-1}{3},\ y = \frac{2}{3},\ z = \frac{-1}{3}$

b) *ran* (A') = 3 ≠ *ran* (A) = 2.

El sistema es *incompatible*.

c) *ran* (A) = *ran* (A') = 2 < *n.º de incógnitas*.

El sistema es *compatible indeterminado*.

Soluciones: $x = -1 - \lambda,\ y = \lambda,\ z = 1 - \lambda$

d) *ran* (A) = *ran* (A') = 3 = *n.º de incógnitas*.

El sistema es *compatible determinado*.

Solución: $x = 2,\ y = 3,\ z = 4$

9 a) $x = \frac{\lambda}{3},\ y = \frac{2\lambda}{3},\ z = \lambda$ b) $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$

10 a) No existe ningún valor de a para el que el sistema tenga infinitas soluciones.

b) El sistema tiene infinitas soluciones para $a = 2$.

Página 115

11 a) • Si $a = -5 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 2$

El sistema es *compatible indeterminado*.

• Si $a \neq -5 \rightarrow$ Solo tiene la solución trivial $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

b) • Si $a = -3$ o $a = 2 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 2$

El sistema es *compatible indeterminado*.

• Si $a \neq -3$ y $a \neq 2 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3$. Solo existe la solución trivial $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

c) • Si $a = -\dfrac{5}{2} \rightarrow ran(A) = ran(A') = 2$

El sistema es *compatible indeterminado*.

• Si $a \neq -\dfrac{5}{2} \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3$.

Solo existe la solución trivial $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

d) • Si $a = \dfrac{46}{3} \rightarrow ran(A) = ran(A') = 2$

El sistema es *compatible indeterminado*.

• Si $a \neq \dfrac{46}{3} \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3$.

Solo existe la solución trivial $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

12 a) • Si $m = 1$, el sistema es *incompatible*.

• Si $m = -1$, el sistema es *incompatible*.

• Si $m \neq 1$ y $m \neq -1 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 =$ *n.º de incógnitas*. El sistema es *compatible determinado*.

b) • Si $m = 1$, el sistema es *incompatible*.

• Si $m = 2$, $ran(A') = ran(A) = 2 <$ *n.º de incógnitas*. El sistema es *compatible indeterminado*.

• Si $m \neq 1$ y $m \neq 2 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 =$ *n.º de incógnitas*. El sistema es *compatible determinado*.

c) • Si $m = 1$, $ran(A) = 2 \neq ran(A') = 3$. El sistema es *incompatible*.

• Si $m \neq 1$, $ran(A) = ran(A') = 3 =$ *n.º de incógnitas*. El sistema es *compatible determinado*.

d) • Si $m = 3$, el sistema es *incompatible*.

• Si $m = 1$, $ran(A) = ran(A') = 2 <$ *n.º de incógnitas*. El sistema es *compatible indeterminado*.

• Si $m \neq 3$ y $m \neq 1 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 =$ *n.º de incógnitas*. El sistema es *compatible determinado*.

e) • Si $m = -2 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 =$ *n.º de incógnitas*. El sistema es *compatible indeterminado*.

• Si $m \neq -2 \rightarrow ran(A') = 4 \neq ran(A) = 3$. El sistema es *incompatible*.

f) • Si $m = -1$, $ran(A) = ran(A') = 3 =$ *n.º de incógnitas*. El sistema es *compatible determinado*.

• Si $m \neq -1$, $3 = ran(A) < ran(A') = 4 \rightarrow$ El sistema es *incompatible*.

13 a) • Si $m \neq 10$, el sistema es *incompatible*.

• Si $m = 10$, el sistema es *compatible indeterminado*.

Soluciones: $x = \dfrac{1}{5}\lambda + 1$, $y = \dfrac{3}{5}\lambda - 1$, $z = \lambda$

Interpetación geométrica:

• Si $m \neq 10$, tenemos tres planos que se cortan dos a dos.

• Si $m = 10$, tenemos tres planos que se cortan en una recta.

b) • Si $a \neq -1$ y $a \neq 1 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 \rightarrow$ El sistema es *compatible determinado*.

$$x = \frac{-a + a^2 + 1}{a - 1}, \; y = \frac{1}{a + 1}, \; z = \frac{2}{a^2 - 1}$$

• Si $a = -1$, $ran(A) \neq ran(A') \rightarrow$ El sistema es *incompatible*.

• Si $a = 1$, $ran(A) \neq ran(A') \rightarrow$ El sistema es *incompatible*.

Interpretación geométrica:

• Si $a \neq -1$ y $a \neq 1$, tenemos tres planos que se cortan en un punto.

• Si $a = -1$, el primer y el tercer plano son paralelos.

• Si $a = 1$, el primer y el segundo plano son paralelos.

c) • Si $m \neq 1 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 \rightarrow$ El sistema es *compatible determinado.*

Solución: $x = 1$, $y = 1$, $z = -1$.

• Si $m = 1$, $ran(A) = ran(A') = 2 \rightarrow$ El sistema es *compatible indeterminado*.

Soluciones: $x = -\lambda + 2$, $y = \lambda$, $z = -1$

Interpretación geométrica:

• Si $m \neq 1$, tenemos tres planos que se cortan en un punto.

• Si $m = 1$, los tres planos se cortan en una recta.

d) • Si $a \neq 1$ y $a \neq 2 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 \rightarrow$ El sistema es *compatible determinado*.

$$x = \frac{a - 1}{a - 2}, \; y = \frac{a - 1}{a - 2}, \; z = -\frac{1}{a - 2}$$

- Si $a = 1$, las soluciones son: $x = 1 - \lambda,\ y = 0,\ z = \lambda$
- Si $a = 2$, el sistema es *incompatible*.

Interpretación geométrica

- Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$, tenemos tres planos que se cortan en un punto.
- Si $a = 1$, dos planos son coincidentes y se cortan en una recta con el tercero.
- Si $a = 2$, los planos se cortan dos a dos.

14 a) $x = 1,\ y = 0,\ z = 0$ b) $x = -1,\ y = 2,\ z = -2$

c) $x = 2,\ y = -3,\ z = 1$ d) $x = 0,\ y = 1,\ z = 1$

15 a) $\left.\begin{array}{l} x + 3y + 2x = 4 \\ x - y - z = 0 \end{array}\right\} \to x = \dfrac{4+\lambda}{4},\ y = \dfrac{4-3\lambda}{4},\ z = 1$

b) $\left.\begin{array}{r} x + y = 4 \\ 3x - y = 0 \\ 2x - y = 1 \end{array}\right\} \to ran(A) \neq ran(A')$, el sistema es *incompatible*.

16 $\left.\begin{array}{rcl} x - y + 4z &=& 11 \\ 3x + y &=& 5 \\ -x + z &=& 2 \end{array}\right\} \to x = 1,\ y = 2,\ z = 3$

17 $x = 1,\ y = -1,\ z = 1$

18 La unidad A cuesta 0,50 €, la unidad B cuesta 1 € y la unidad C cuesta 1,50 €.

19 a) El número es 954.

b) Este sistema no tiene solución, luego no hay ningún número que verifique esas condiciones.

20 La longitud de camino llano entre A y B es de 94,8 km.

21 a) Sean $x,\ y,\ z$ las cantidades invertidas en A, B y C, respectivamente.

$$\left.\begin{array}{rcl} x + y + z &=& 60\,000 \\ x + y &=& mz \\ 0,05x + 0,1y + 0,2z &=& 6\,000 \end{array}\right\}$$

b) • Si $m = -1$: El sistema es *incompatible*.

• Si $m \neq -1$: El sistema es *compatible determinado*.

Por tanto, si $m > 0$, el sistema es *compatible determinado*.

c) $m = 5$, *solución:* $x = 20\,000$ €, $y = 30\,000$ €, $z = 10\,000$ €.

Página 116

22 La rentabilidad del modelo A es del 23 %, la rentabilidad del modelo B es del 11 %, y la rentabilidad del modelo C es del 3 %.

23 a) Llamamos x al número de billetes de 10 €, y al número de billetes de 20 € y z al número de billetes de m €.

$$\left.\begin{array}{rcl} x + y + z &=& 95 \\ 10x + 20y + mz &=& 2\,000 \\ x &=& 2y \end{array}\right\}$$

Para $m = 5$, su determinante resulta:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 20 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -25 \neq 0 \to ran(A) = ran(A') = 3$$

Luego el sistema es *compatible determinado*.

b) Para $m = 5$, la solución no es posible porque el número de billetes no puede ser negativo.

Para $m = 100$, la solución no es posible porque el número de billetes no puede ser un número fraccionario.

c) Para $m = 50$, hay 50 billetes de 10 €, 25 billetes de 20 € y 20 billetes de 50 €.

24 a) Si $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq 0 \to ran(A) = ran(A') = 3 \to$ El sistema es *compatible determinado*.

$x = -\dfrac{4}{\lambda+1},\ y = \dfrac{\lambda+3}{\lambda+1},\ z = \dfrac{2\lambda}{\lambda+1}$

Si $\lambda = 0$, el sistema es *compatible indeterminado*.

Soluciones: $x = -3\lambda + 5,\ y = \lambda,\ z = 0$

Si $\lambda = -1 \to ran(A) = 2;\ ran(A') = 3 \to$ El sistema es *incompatible*.

b) Si $m \neq 0$ y $m \neq -1 \to ran(A) = ran(A') = 3 \to$ Sistema *compatible determinado*.

Soluciones: $x = \dfrac{2m+1}{m^2+m},\ y = \dfrac{1}{m},\ z = \dfrac{2m+1}{m^2+m}$

Si $m = 0 \to ran(A) < 3$, pero $ran(A') = 3 \to$ Sistema *incompatible*.

Si $m = -1 \to ran(A) < 3$, pero $ran(A') = 3 \to$ Sistema *incompatible*.

c) Si $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq 2 \to ran(A) = ran(A') = 3 \to$ Sistema *compatible determinado*.

Soluciones: $x = \dfrac{\begin{vmatrix} \lambda & 3 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-2\lambda^2 + 2\lambda + 4} = 1,$

$$y = \dfrac{\begin{vmatrix} \lambda & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-2\lambda^2 + 2\lambda + 4} = 0,\quad z = \dfrac{\begin{vmatrix} \lambda & 3 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2\lambda^2 + 2\lambda + 4} = 0$$

Si $\lambda = 2 \to ran(A) = 2;\ ran(A') = 2 \to$ Sistema *compatible indeterminado*.

Soluciones: $x = 4\mu + 1,\ y = -3\mu,\ z = \mu$

33

Si $\lambda = -1 \rightarrow ran(A) = 2;\ ran(A') = 2 \rightarrow$ Sistema *compatible indeterminado*.

Soluciones: $x = \mu + 1,\ y = 0,\ z = \mu$

d) Si $m \neq 0,\ m \neq 1$ y $m \neq 2 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3$

Luego el sistema es *compatible determinado*.

Solución: $x = 0,\ y = -\dfrac{2m^2 - 1}{m - m^2},\ z = \dfrac{2m - 1}{m - m^2}$

Para $m = 0 \rightarrow ran(A) = 2;\ ran(A') = 3 \rightarrow$ Sistema *incompatible*.

Para $m = 1 \rightarrow ran(A) = 2;\ ran(A') = 3 \rightarrow$ Sistema *incompatible*.

Para $m = 2 \rightarrow ran(A) = 2;\ ran(A') = 2 \rightarrow$ Sistema *compatible indeterminado*.

Soluciones: $x = \lambda + \dfrac{3}{2},\ y = -3\lambda - 1,\ z = \lambda$

25 a) Este sistema es *compatible* por ser homogéneo.

Si $a \neq 0 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 \rightarrow$ Sistema *compatible determinado*.

Solución: $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$

Si $a = 0 \rightarrow$ Sistema *compatible indeterminado*.

Soluciones: $x = 0,\ y = 0,\ z = \lambda$

b) Si $m \neq 1$ y $m \neq 2 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 \rightarrow$ Sistema *compatible determinado*.

Soluciones: $x = 0,\ y = -\dfrac{1}{m - 1},\ z = \dfrac{1}{m - 1}$

Si $m = 1 \rightarrow ran(A) = 2;\ ran(A') = 3 \rightarrow$ Sistema *incompatible*.

Si $m = 2 \rightarrow ran(A) = 2;\ ran(A') = 2 \rightarrow$ Sistema *compatible indeterminado*.

Soluciones: $x = \dfrac{1 - \lambda}{5},\ y = -\dfrac{3\lambda - 2}{5},\ z = \lambda$

c) Si $k \neq 0 \rightarrow ran(A') = 4 \rightarrow$ Sistema *incompatible*.

Si $k = 0 \rightarrow ran(A') = 3$

Como $ran(A) < 3$, el sistema es *incompatible.*

Este sistema no tiene solución para ningún valor de k.

d) Si $m \neq 0$ y $m \neq 7 \rightarrow ran(A') = 4 \rightarrow$ Sistema *incompatible*.

Si $m = 0 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 \rightarrow$ Sistema *compatible determinado*.

Soluciones: $x = \dfrac{5}{4},\ y = \dfrac{5}{4},\ z = 0$

Si $m = 7 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 \rightarrow$ Sistema *compatible determinado*.

Soluciones: $x = -\dfrac{1}{2},\ y = \dfrac{5}{4},\ z = \dfrac{7}{4}$

26 a) A es singular para $m = -1$ y $m = 1$.

b) Si $m = -1 \rightarrow ran(A) = 2;\ ran(A') = 3 \rightarrow$ Sistema *incompatible*.

Si $m = 1 \rightarrow ran(A) = 2;\ ran(A') = 2 \rightarrow$ Sistema *compatible indeterminado*.

Soluciones: $x = \lambda,\ y = 2,\ z = 1$

27 a) Como $ran(A) \neq ran(A')$, el sistema es *incompatible*.

b) *Solución:* $a = 1,\ b = -1,\ c = 1$

c) Como el sistema es compatible determinado, la solución es única.

28 a) $ran(A) = ran(A') = 3 \rightarrow$ El sistema es *compatible determinado* para cualquier valor de α y β.

b) $ran(A) = 3 \rightarrow$ El sistema será siempre *compatible determinado*, luego la solución siempre será única.

29 a) V b) F c) F d) V

e) F f) V g) F h) F

Página 117

30 a) Sí, podría ser compatible indeterminado si $ran(A) = ran(A') <$ *n.º de incógnitas*.

b) No, pues al ser $ran(A) <$ *n.º de incógnitas*, el sistema no puede ser compatible determinado.

c) Sí, si es compatible, pasando al 2.º miembro las incógnitas que sea necesario.

31 No.

32 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

33 Los dos determinantes tienen el mismo valor, porque el segundo se obtiene sustituyendo la 3.ª columna por ella más la suma de las otras dos, luego valen cero para los mismos valores de a, b y c. Por tanto, el sistema $AX = C$ es *compatible determinado*.

34 a) • Si $a = -1 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 <$ *n.º de incógnitas*. El sistema es *compatible indeterminado*.

$x = \dfrac{5 - 2\lambda}{3},\ y = \dfrac{4 - 4\lambda}{3},\ z = \dfrac{-8 + 5\lambda}{3},\ t = \lambda$

• Si $a \neq -1 \rightarrow ran(A) = 3 \neq ran(A') = 4$. El sistema es *incompatible*.

b) • Si $a = 0$, el sistema es *incompatible*.

• Si $a \neq 0 \rightarrow ran(A) = ran(A') =$ *n.º de incógnitas* $= 4$.

El sistema es *compatible determinado*.

$x = \dfrac{2a + 1}{a^2},\ y = \dfrac{1}{a^2},\ z = \dfrac{-1}{a},\ t = -1$

35 a) • Si $a = 0$ y $b = -4 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 2 <$ *n.º de incógnitas*. El sistema es *compatible indeterminado.*

• Si $a = 0$ y $b \neq -4 \rightarrow ran(A) = 2 \neq ran(A') = 3$.

El sistema es *incompatible*.

• Si $a \neq 0 \rightarrow ran(A) = ran(A') =$ *n.º de incógnitas* $= 3$. El sistema es *compatible determinado*, cualquiera que sea el valor de b.

b) • Si $a = 1$ y $b \neq 0 \rightarrow$ Sistema *incompatible*.

• Si $a = 1$ y $b = 0 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 2 <$ *n.º de incógnitas* $\rightarrow$ Sistema *compatible indeterminado*.

• Si $a = 2$ y $b \neq 1 \rightarrow ran(A) = 2 \neq ran(A') = 3$.

El sistema es *incompatible*.

• Si $a = 2$ y $b = 1 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 2 <$ *n.º de incógnitas*. El sistema es *compatible indeterminado*.

• Si $a \neq 1$ y $a \neq 2 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 =$ *n.º de incógnitas*. El sistema es *compatible determinado* para cualquier valor de b.

c) $ran(A) = ran(A') =$ *n.º de incógnitas.*

El sistema es *compatible determinado* para cualquier valor de a, b y c.

d) • Si $a = -1$ y $b \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2 \neq ran(A') = 3$.

El sistema es *incompatible*.

• Si $a = -1$ y $b = 0 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 2 <$ *n.º de incógnitas*. El sistema es *compatible indeterminado*.

• Si $a = 2$ y $b \neq 1 \rightarrow ran(A) = 2 \neq ran(A') = 3$.

El sistema es *incompatible*.

• Si $a = 2$ y $b = 1 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 2 <$ *n.º de incógnitas*. El sistema es *compatible indeterminado*.

• Si $a \neq -1$ y $a \neq 2 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 =$ *n.º de incógnitas*. El sistema es *compatible determinado* para cualquier valor de b.

36
$$\begin{cases} x - 1 = 3\left(\frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}\right) - \left(-\frac{2}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{8}{5}\right) \\ y + 2 = 2\left(\frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{2}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{8}{5}\right) \\ z = \left(\frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}\right) + 2\left(-\frac{2}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{8}{5}\right) \end{cases}$$

Autoevaluación

1 *Soluciones:* $x = \lambda$, $y = \lambda$, $z = 1 - 2\lambda$.

Son cuatro planos con una recta en común.

2 El camión P tiene que dar 5 viajes.

El camión Q tiene que dar 4 viajes.

El camión R, tiene que dar 3 viajes.

3 a) • Si $a = 1$, el sistema es *incompatible*.

• Si $a = -2$, $ran(A) = ran(A') = 2 <$ *n.º de incógnitas*.

El sistema es *compatible indeterminado*.

• Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$, $ran(A) = ran(A') = 3$.

El sistema es *compatible determinado*.

b) *Solución:* $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$, $z = 0$

4 • Si $m = 4$, $ran(A) = ran(A')$.

El sistema es *compatible*.

Soluciones: $x = -1 + \lambda$, $y = 2 - \lambda$, $z = \lambda$

• Si $m \neq 4 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 =$ *n.º de incógnitas*.

El sistema es *compatible determinado*.

Solución: $x = 1$, $y = 0$, $z = 2$

5 • Si $ran(A) = ran(A') = 3 =$ *n.º de incógnitas*.

El sistema será *compatible determinado*.

• Si $ran(A) = 3 \neq ran(A') = 4$

El sistema será *incompatible.*

6 • Si $a = 14$, el sistema es *compatible determinado*.

Solución: $x = 17$, $y = 8$, $z = 6$

• Si $a \neq 14 \rightarrow ran(A) = 3 \neq ran(A') = 4$

El sistema es *incompatible*.

7 El sistema será *compatible determinado*. Solo tiene una solución que es la trivial: $x = 0$, $y = 0$.