UNIDAD DIDÁCTICA: DIVISIBILIDAD

LABORATORIO GENÉTICO DE NÚMEROS

Duración: 8-10 sesiones

Metodología: Trabajo **cooperativo** y equipos **migratorios**.

Descripción:

Durante las sesiones en las que se desarrollará la unidad didáctica, el aula se dividirá en 6 rincones o áreas. Cada una de estas regiones tiene asignada una tarea o actividad. Así mismo, cada una de estas áreas podrá ser ocupada como máximo por un único equipo. El alumnado tiene el reto de completar las actividades de cada sección en un máximo de 10 sesiones. A continuación, se describen brevemente las actividades asociadas a cada área del aula.

Sería conveniente iniciar la unidad con una sesión previa donde se recuerden simplemente los conceptos de número primo y número compuesto. Tras ello, se realizaría conjuntamente y de forma simultánea para todos los grupos la actividad titulada ADN NUMÉRICO (ya que es la base para el resto de actividades)

Actividades:

- ADN NUMÉRICO (ACTIVIDAD SIMULTÁNEA)

- DESCIFRANDO EL CÓDIGO GENÉTICO (RINCÓN 1)
- DIBUJOS DE WORLEY (RINCÓN 2)
- EL ASCENSO A UN PRIMO DE CONWAY (RINCÓN 3)
- CARRERA EN MATHLAND (RINCÓN 4)
- REPARTIENDO A LO GRANDE (RINCÓN 5)

- WATSON & CRICK: ADN ARTÍSTICO (RINCÓN 6)
  Este último rincón puede incluirse en el aula una vez se hayan realizado todas o algunas de las actividades de los rincones previos.

Materiales:

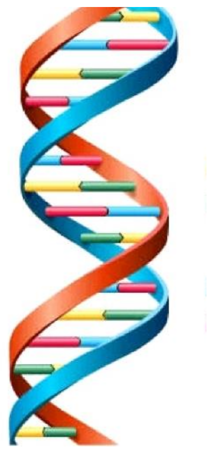
- Al menos dos colecciones de cubos encajables de diez colores diferentes.

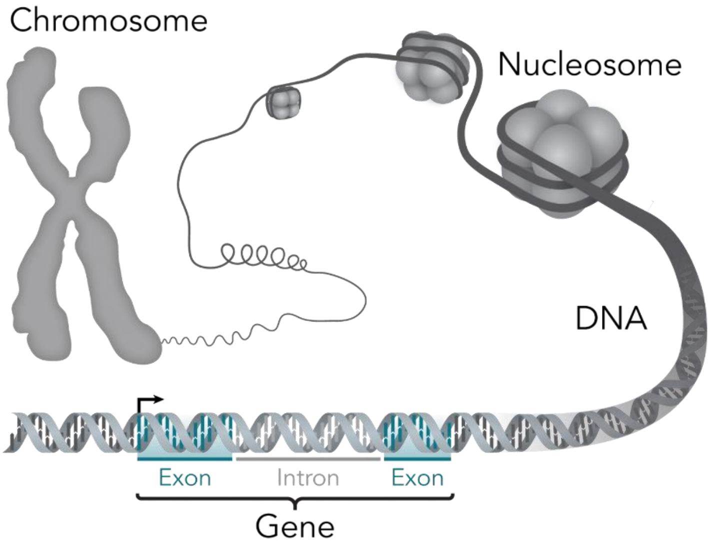
- Móvil (al menos uno por grupo). Se empleará para fotografiar cada composición numérica que realicen (si lo desean).
- Rotuladores o lápices de color (que podrán también utilizarse en el caso que el equipo prefiera dibujar las construcciones en lugar de fotografiarlas)
- Folios (para identificar cada área o rincón)
- Hamma beds de diez colores diferentes y plantillas de hammas
- Plancha y papel vegetal de cocina (para planchar los hammas)
- Ordenador con conexión a Internet
- Y mucha energía… desayuna bien.

Pedro A. Martínez Ortiz
Mª Carmen Asensio Durá

ADN NUMÉRICO

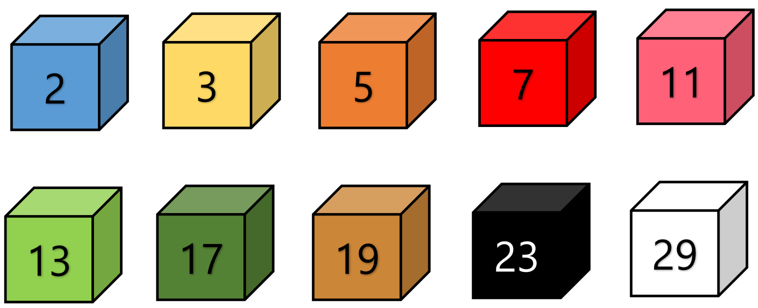
El ADN es una cadena de nucleótidos almacenada en nuestras células y que nos identifica como seres únicos. No hay nadie que tenga exactamente nuestro mismo ADN y si perdemos un pelo y analizan el ADN, inmediatamente sabrían que nos pertenecería.





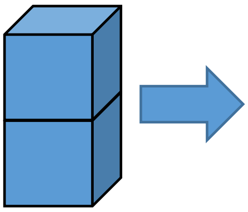
De forma similar, todos los números naturales esconden una cadena de ADN que los hace únicos y especiales ante el resto. A esta cadena se le conoce como **FACTORIZACIÓN**. Durante esta sesión vamos a indagar en la esencia matemática de los números naturales.

Vamos a suponer que cada una de las piezas de las que disponemos representa un número primo.

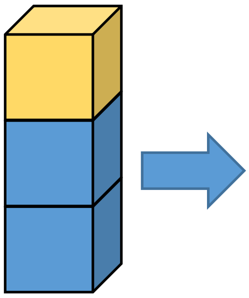


Pedro A. Martínez Ortiz
Mª Carmen Asensio Durá

Además, estas piezas pueden superponerse de forma que cada vez que enlazamos dos cubos lo que en realidad estamos haciendo es multiplicar los valores de ambas piezas. Así pues, por ejemplo, el número 4 y el número 12 podrían representarse como sigue.



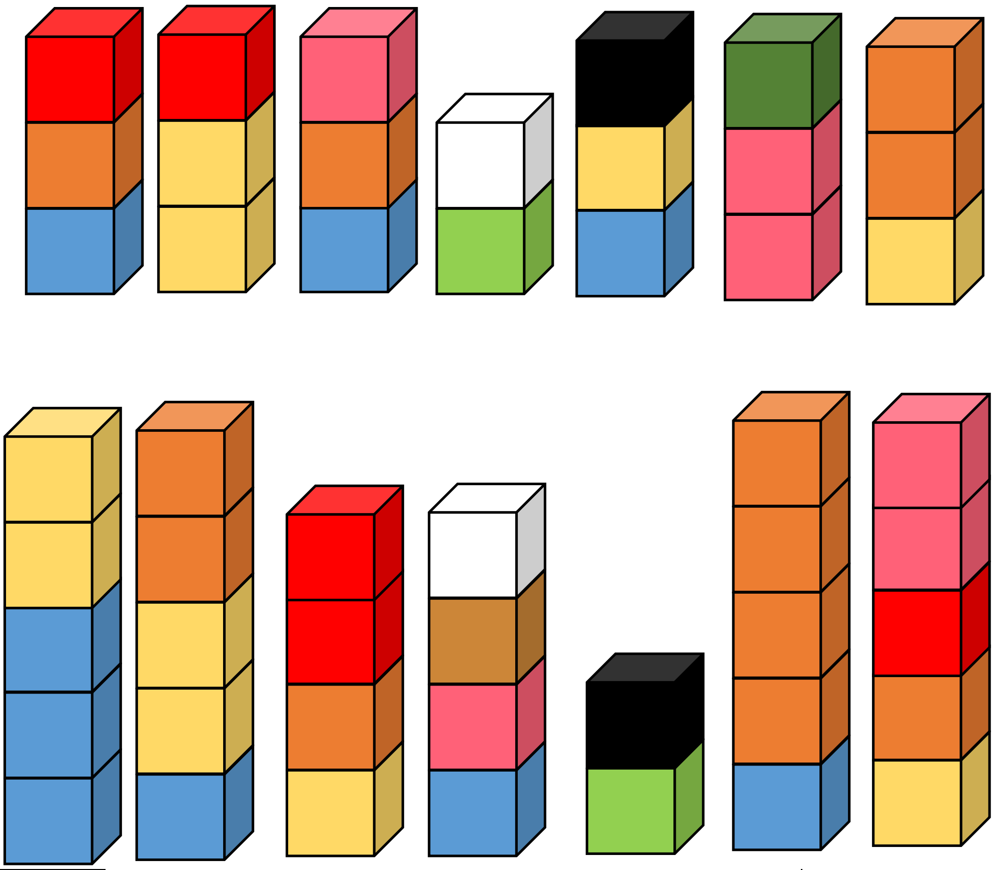
$2 \cdot 2 = 2^2$



$2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$

Lo que deberéis hacer ahora entre todos es **construir la cadena de ADN de los 30 primeros números naturales**. Haz una foto de cada pieza para posteriormente realizar un collage con la representación de cada número.

Ahora vamos a hacerlo al revés. Aquí os proponemos varias factorizaciones de números naturales. ¿seríais capaces de averiguar de qué números se tratan?

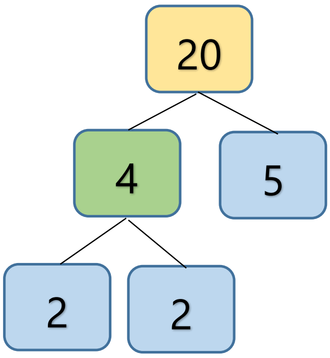


Pedro A. Martínez Ortiz
Mª Carmen Asensio Durá

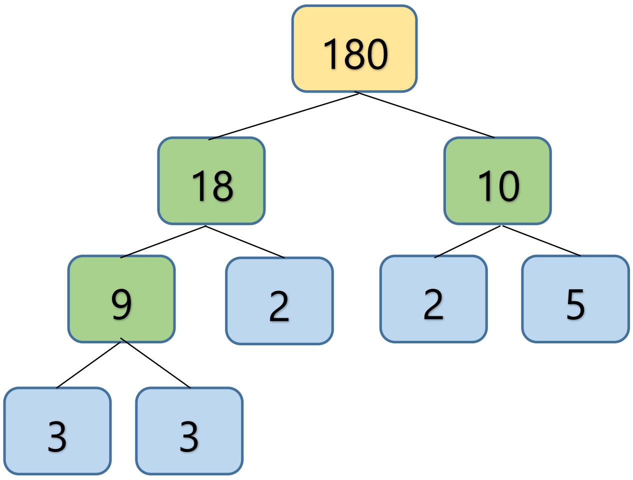
DESCIFRANDO EL CÓDIGO GENÉTICO

Ya sabemos que cada número natural tiene un ADN que lo hace especial, su **FACTORIZACIÓN**. Ahora bien, **¿cómo podemos conocer la factorización de cada número?** Para valores naturales pequeños resulta relativamente fácil, pero... ¿y si el número es más grande? ¿Cómo podemos hacerlo?

Observa el análisis de los siguientes números naturales. **Intenta explicar cómo se obtiene la factorización de cada uno de ellos.**



$20=2\cdot 2\cdot 5=2^2\cdot 5$



$180=3\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot 5=2^2\cdot 3^2\cdot 5$

¿Serías capaz ahora de escribir **la factorización de los siguientes números** naturales siguiendo la misma mecánica?

NÚMERO	FACTORIZACIÓN	NÚMERO	FACTORIZACIÓN
300		**294**	
120		**132**	
350		**320**	
225		**450**	

¿Conoces o se te ocurre alguna otra forma de realizar la factorización de un número? Para ello quizá te sea útil recordar los criterios de divisibilidad de algunos números primos. Los **criterios de divisibilidad** son unas reglas o "truquitos" que nos ayudan fácilmente a saber si un número puede dividirse por otro.

Pedro A. Martínez Ortiz
Mª Carmen Asensio Durá

ES DIVISIBLE POR…	CRITERIO DE DIVISIBILIDAD	EJEMPLOS
2		
3		
5		
7		
11		

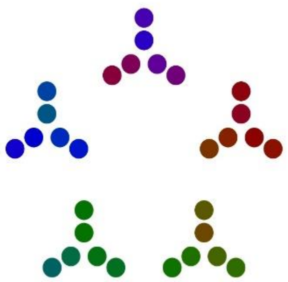
Siguiendo estos criterios, podemos descomponer mecánicamente muchos números naturales que nos aparecerán a lo largo del curso.

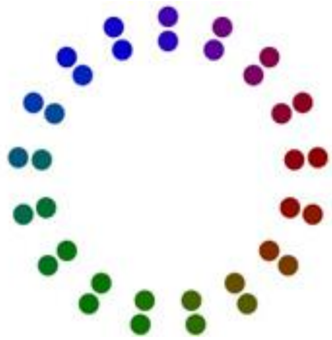
Realiza la factorización de los siguientes números naturales y luego realiza la representación de cada número utilizando los cubos de color. Realiza foto de la estructura para luego pegarla en tu cuaderno junto a la factorización de cada valor.

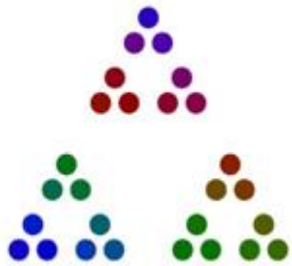
180	420	7912	2325	350
15300	**1037**	**3900**	**11340**	**5985**

DIBUJOS DE WORLEY

Van Worley ideó una representación gráfica muy bonita de los números naturales atendiendo a su factorización. Como la factorización de cada número es única, cada dibujo representa un solo número. Observa las siguientes representaciones de Worley:







$30=2\cdot3\cdot5$

$34=2\cdot17$

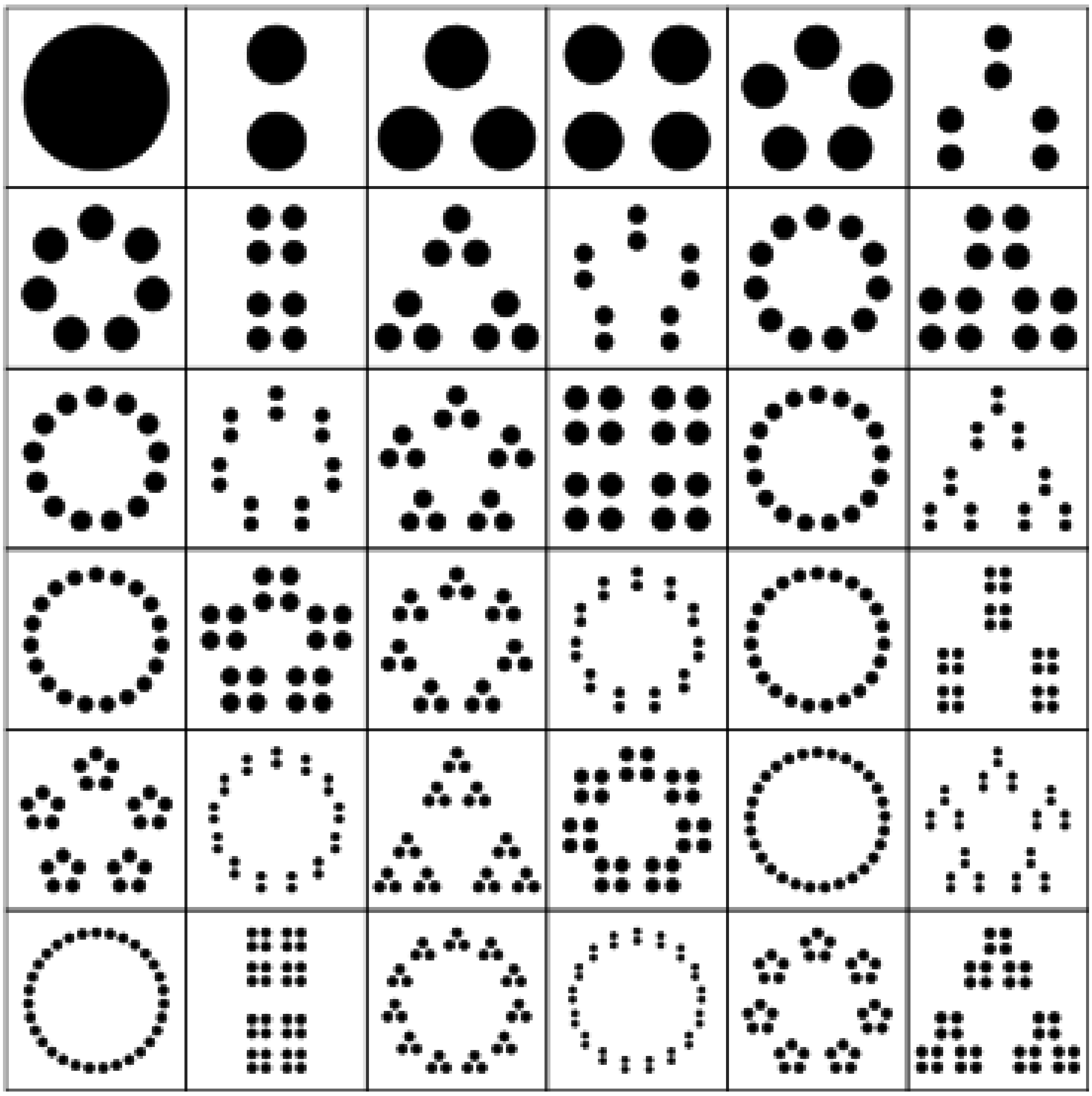
$27=3^3$

¿Cómo se construyen? ¿Podríais explicarlo? ¿Seríais capaces de elaborar las **representaciones de Worley** de los siguientes números?

24	**36**	**42**
75	**100**	**125**

Pedro A. Martínez Ortiz
Mª Carmen Asensio Durá

Aquí tienes la representación de Worley de los primeros 36 números naturales. Observa las figuras detenidamente.

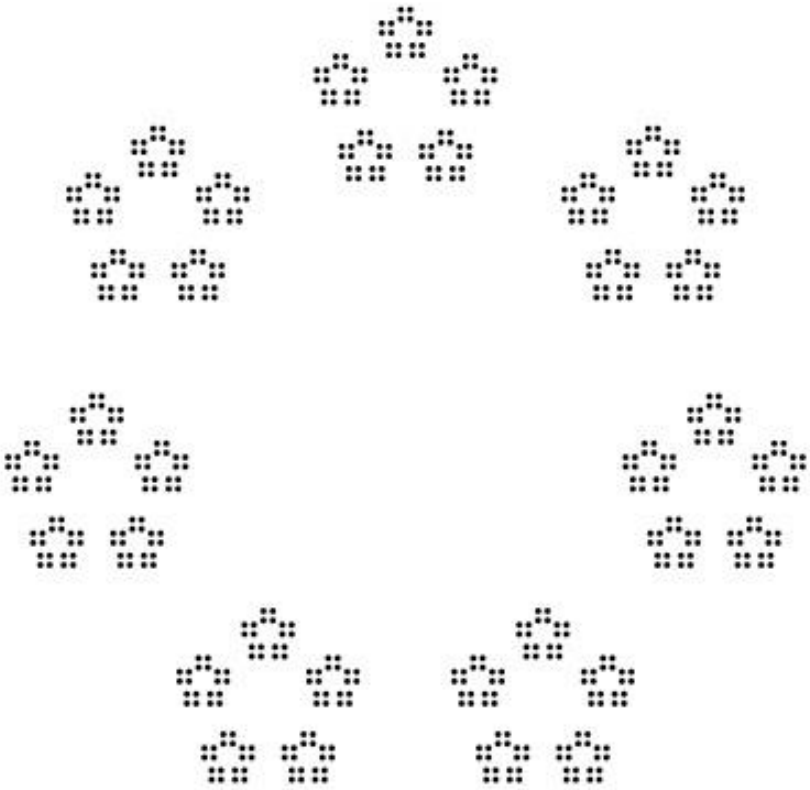


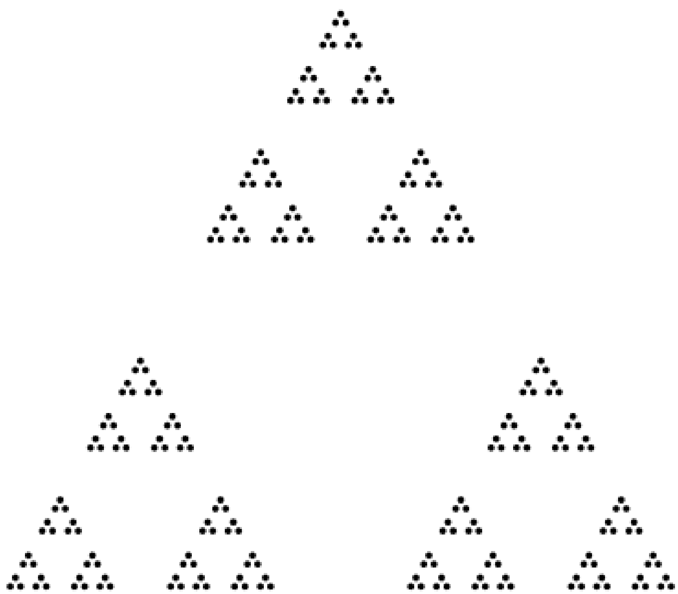
¿**Qué tienen de especial las representaciones de los números primos**? ¿Es fácil identificar un número primo mediante estos dibujos?

Podéis ver una secuenciación animada de la representación de Worley de los primeros números naturales en el siguiente enlace:

http://www.datapointed.net/visualizations/math/factorization/animated-diagrams/

Para acabar, ¿podríais averiguar **qué números representan las siguientes figuras** de Worley





Pedro A. Martínez Ortiz
Mª Carmen Asensio Durá

EL ASCENSO A UN PRIMO DE CONWAY

Hace unos años, el famoso matemático Británico John H. Conway observó una cosa muy curiosa que parecía ocurrir siempre con cualquier número natural que cogiéramos. Veamos cómo nos lo cuenta Phi.

Después de hacer este proceso con muchos números observó algo muy interesante. Al parecer, cogieras el número que cogieras, al final, el proceso siempre acababa en un número primo (como el 2213 del ejemplo).

Tristemente, Conway no logró demostrarlo y decidió añadir su conjetura a un famoso listado donde ya había otros problemas sin resolver. Este listado se conoce como ***Los 5 problemas de Conway*** y la resolución de cada uno de ellos está premiada con 1000$.

Pedro A. Martínez Ortiz
Mª Carmen Asensio Durá

Realiza el ascenso de Conway de los siguientes números. Para hacerlo correctamente, observa en el cómic que los factores de cada factorización deben estar ordenados de menor a mayor. ¿Qué sucede? ¿Crees que Conway tenía razón?

NÚMERO	PASO 1	PASO 2	PASO 3	PASO 4	PASO 5	PASO 6	...
4							...
6							...
8							...
16							...
32							...
48							...

Pues bien, aunque parezca mentira, la conjetura es falsa. Es decir, no todos los números nos van a llevar a un número primo. En junio de 2017, James Davis encontró un número cuyo ascenso no termina en un número primo y por tanto ganó 1000$ de premio. Este número es el 13 532 385 396 179. ¿Te atreves a averiguar su factorización?

El ascenso a un primo de Conway es sólo uno de los muchos enigmas y misterios que rodean a los números primos. ¿Queréis conocer alguna más?

La **criptografía** es la ciencia que estudia la protección de la información con distintos métodos para que personas no autorizadas puedan acceder a ella. Hoy en día esta disciplina es muy importante ya que se utiliza en multitud de transcripciones como, por ejemplo: comunicaciones gubernamentales, mensajes de empresas, en las transacciones bancarias, en el comercio por internet, en las llamadas telefónicas desde el móvil, etc. Todas estas situaciones requieren de protección para salvaguardar los intereses e intimidad de las personas.

El **algoritmo criptográfico RSA**, que se utiliza para garantizar la seguridad del intercambio de información en la web, está basado precisamente en **la factorización de números enteros en números primos**. Su seguridad se debe a que no se conoce como se distribuyen con exactitud los números primos. Parece ser que a medida que avanzamos en la secuencia de números naturales, los números primos se van alejando más unos de otros, pero no está demostrado. Conocer cómo se distribuyen, y poder así conseguir primos cada vez más grandes que sirvan de clave criptográfica, es un gran reto para las tecnologías y para las propias matemáticas.

Y ese es el desafío que plantea la famosa **hipótesis de Riemann**, que hasta ahora nadie ha sido capaz de resolver, pese al esfuerzo de los mejores matemáticos del mundo durante más de 145 años. Formulada por Bernhard Reinmann en 1859, trata de explicar cómo podrían estar distribuidos los números primos, pero su autor no pudo llegar a demostrarla. Si alguien lograra hacerlo, transformaría la forma de hacer negocios y afectaría a la mecánica cuántica, la teoría del caos y al futuro de la computación. Por eso, el **Instituto Matemático Clay** de la Universidad de Cambridge anunció en 2000 que premiaría con **un millón de dólares** a quien lograra despejar la famosa conjetura.

CARRERA EN MATHLAND

Primeramente, lee tranquilamente el cómic adjunto de "Mathland" donde Álgebra, Alan, Phi y Pi deciden competir en una carrera de karts.

Haz un listado con los instantes por los que pasan cada uno de los competidores por el punto de salida durante las 35 vueltas.

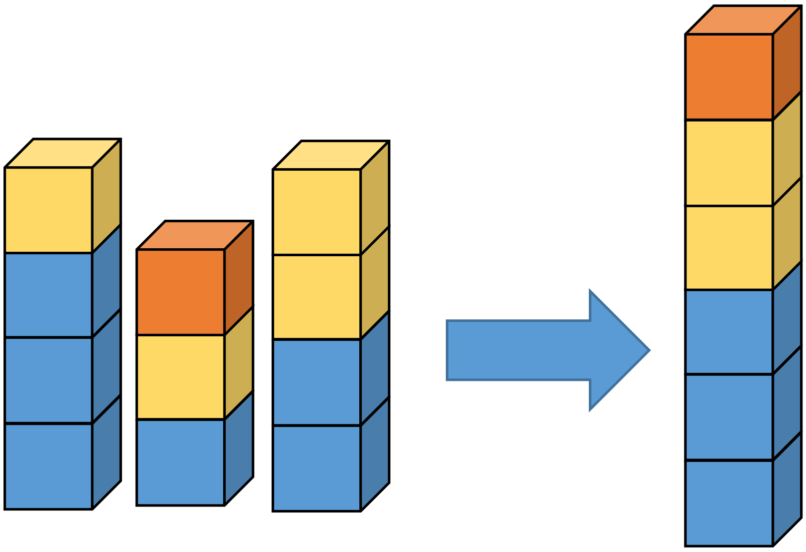
PARTICIPANTE	TIEMPOS EN LOS QUE PASA POR LA LÍNEA DE SALIDA
ALAN	
ALGEBRA	
PHI	

- ¿**Cuántas veces coinciden** los participantes en la línea de salida?

- ¿**Cuál es el primer instante en el que coinciden** todos a la vez en la línea de salida?

A este valor se le denomina ***mínimo común múltiplo***. Analiza estas palabras e intenta explicar por qué se le llama así.

Vamos ahora a desarrollar otra forma de averiguar cuándo es la primera vez que coinciden los tres participantes, pero sin tener que hacer tantos cálculos. Seleccionaremos los tiempos de cada uno y prestaremos atención a su ADN numérico, es decir, su **factorización**. También construiremos la factorización del resultado que hemos obtenido anteriormente.



Pedro A. Martínez Ortiz
Mª Carmen Asensio Durá

- ¿**Qué observas** entre las descomposiciones de los tiempos y el resultado?

- ¿**Podrías explicar alguna manera de obtener el mínimo común múltiplo** de varios números a partir de su factorización?

- ¿Podrías **calcular el mínimo común múltiplo** de los siguientes números?

a)	*m.c.m.* (14, 49)	c)	*m.c.m.* (48, 240, 720)
b)	*m.c.m.* (10, 25, 75)	d)	*m.c.m.* (9, 25,14)

Ahora, **resuelve** de forma razonada los siguientes problemas:

1. Un sitio turístico en el Caribe ofrece tres diferentes cruceros: uno tarda 6 días en ir y regresar a su punto de inicio, el segundo tarda 8 días y el tercero tarda 10 días. Si los tres cruceros partieron al mismo tiempo hace 39 días, ¿cuántos días faltan para que vuelvan a partir el mismo día todos los cruceros?

2. En un vecindario, un camión de helados pasa cada 8 días y un *food truck* pasa cada dos semanas. Se sabe que 15 días atrás ambos vehículos pasaron en el mismo día. Raúl cree que dentro de un mes los vehículos volverán a encontrarse y Oscar cree esto ocurrirá dentro de dos semanas. ¿Quién está en lo cierto?

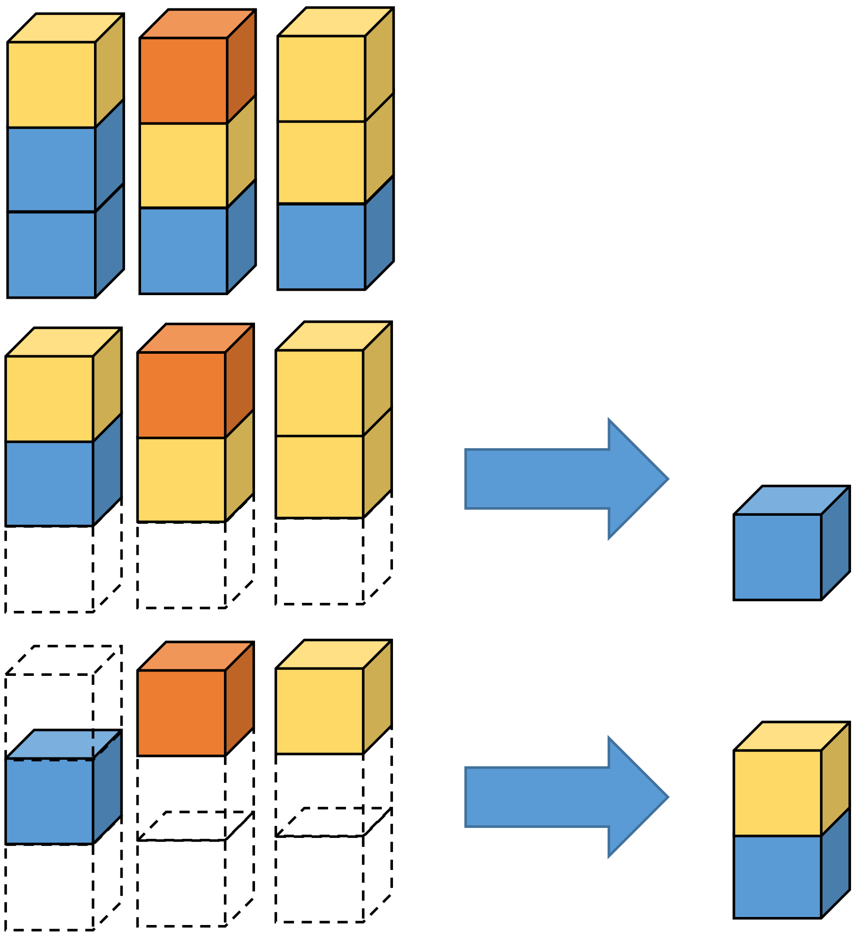
REPARTIENDO A LO GRANDE

Primeramente, lee tranquilamente el cómic adjunto de "Mathland" donde Phi tiene un pequeño pero dulce problema. Después, pensad de cuántas formas distintas podrían montar Álgebra y Phi las cajas de caramelos.

- ¿**Cuántas cajas** necesitarían en cada caso? ¿Cuántos caramelos hay en cada caso dentro de las cajas?
- ¿Cuál es el reparto que utiliza **el mayor número de cajas**?

A este valor se le denomina ***máximo común divisor***. Analiza estas palabras e intenta **explicar por qué se le llama así**.

Vamos ahora a desarrollar otra forma de averiguar cuántas cajas del mayor tamaño posible necesitaríamos para repartir el contenido de la misma forma en cada una de ellas. Seleccionaremos las cantidades de cada tipo de caramelos y prestaremos atención a su ADN numérico, es decir, su **factorización**. Observa el proceso y explica cómo se obtiene el máximo común divisor de varios números:



Pedro A. Martínez Ortiz
Mª Carmen Asensio Durá

- ¿Podrías **calcular el máximo común divisor** de los siguientes números?

a) *m.c.d.* (35, 20) b) *m.c.d.* (60, 72, 108) c) *m.c.d.* (10, 12, 15)

Ahora, **resuelve** de forma razonada los siguientes problemas:

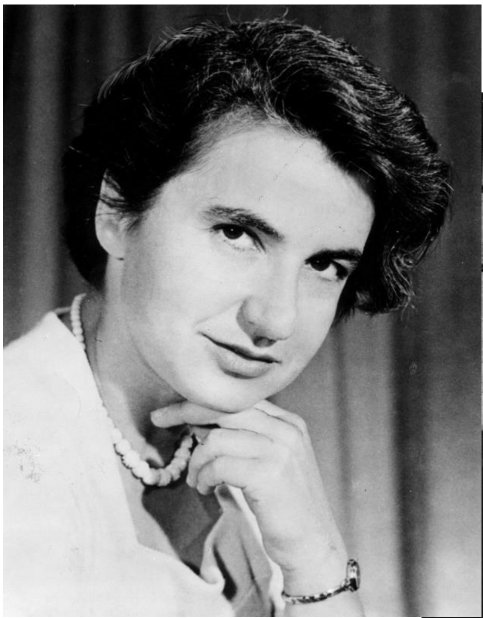
1. Máximo quiere pintar una casa pequeña. Según sus cálculos, necesitará 12 litros de pintura roja, 24 litros de pintura verde y 16 litros de pintura blanca. Pero quiere comprar botes de pintura que tengan la misma cantidad de litros y que el número de botes sea el menor posible, ¿de cuántos litros debe ser cada bote y cuántos botes de cada color debe comprar Máximo?

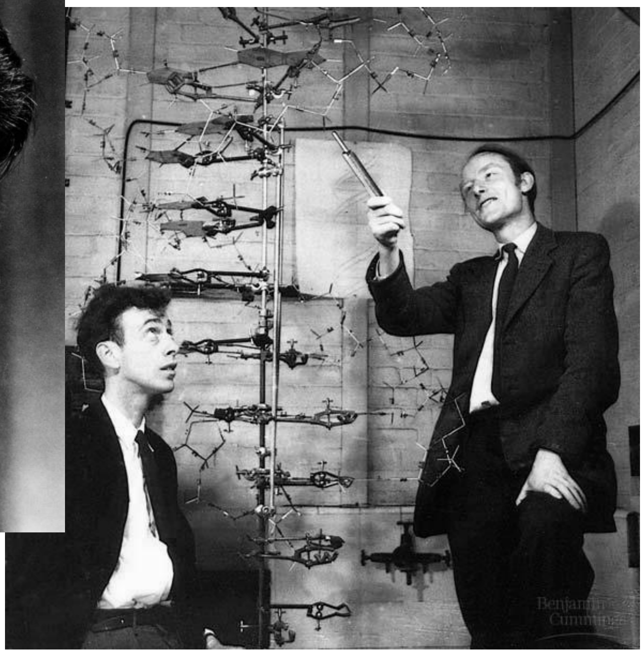
2. Las dimensiones de una caja son: 1,65 m; 2,1 m y 3 m. Se hacen construir cajas cúbicas las mayores que sea posible, cuyo lado sea un número exacto de cm y con las cuales se pueda llenar completamente la caja. Halla el lado y el número de estas cajas.

Pedro A. Martínez Ortiz
Mª Carmen Asensio Durá

FRANKLIN, WATSON & CRICK: ADN ARTÍSTICO

La estructura molecular del ADN (aunque descubierta por Rosalind Franklin) fue atribuida en 1953 a los científicos James Watson y Francis Crick, por lo que obtuvieron el premio Nobel. Matemáticas, biología y arte se unen en esta molécula que contiene toda la información de lo que somos.





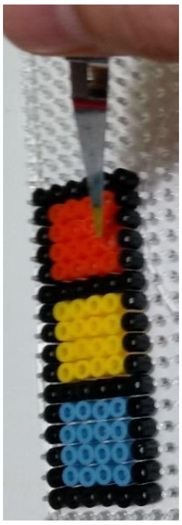
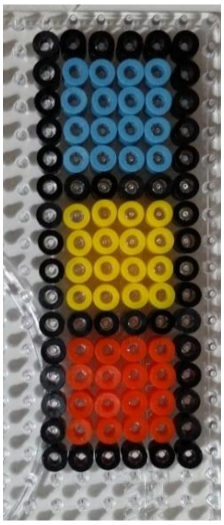
Ya que en este tema hemos estudiado el ADN numérico, **¿por qué no poner un poco de arte al concepto de factorización?**

Utiliza los hammas para crear piezas artísticas relacionadas con los números primos, la descomposición factorial, el máximo común divisor, el mínimo común múltiplo o cualquier otro aspecto trabajado. Estas obras servirán luego para decorar la clase y recordar el contenido que hemos llevado a cabo en esta unidad.

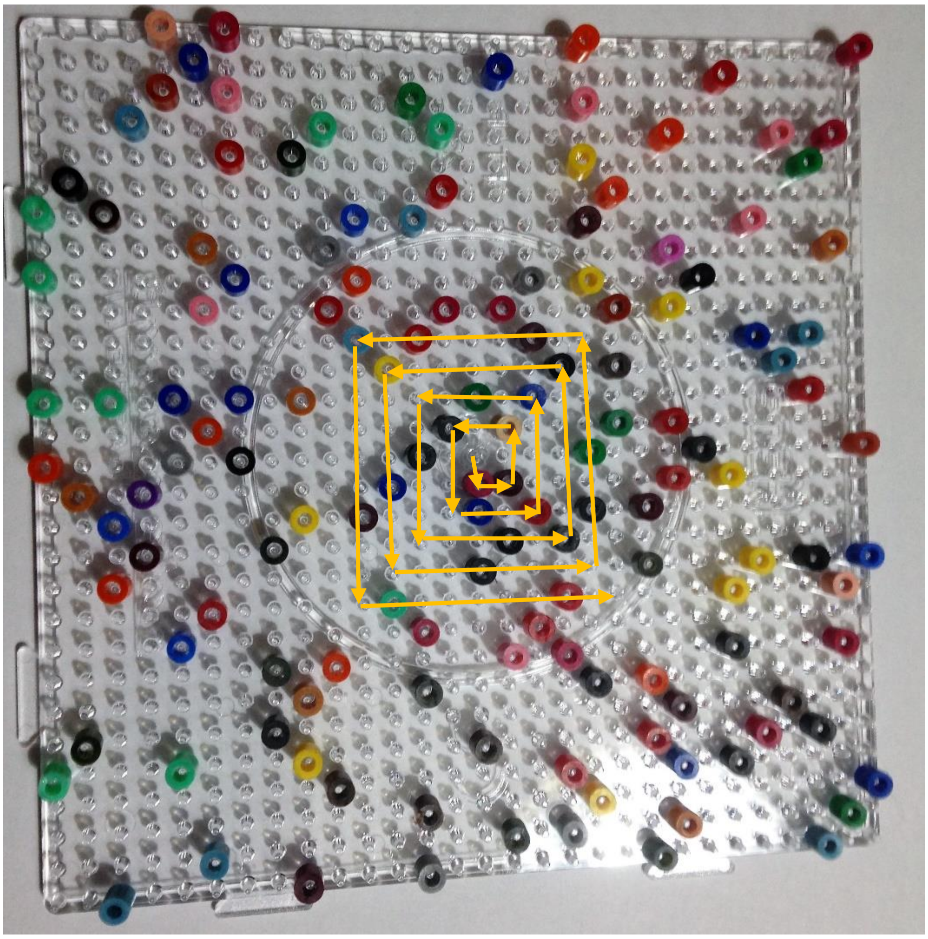
Aquí os damos algunas sugerencias, pero recuerda que el arte es libre así que si no quieres estar condicionado, no gires la página y dale rienda suelta a tu creatividad. Recuerda que la imaginación es poder, así que, si sientes que el arte fluye por tus venas, no te cortes y exprésalo.

Pedro A. Martínez Ortiz
Mª Carmen Asensio Durá

- Podéis realizar, entre todos, la factorización de los primeros números naturales de forma similar a como lo hemos hecho en clase durante esta unidad.

- También podéis investigar más cosas sobre números primos que os inspiren a crear alguna pieza, como por ejemplo la ***Espiral de Ulam***.



Pedro A. Martínez Ortiz
Mª Carmen Asensio Durá


MATHLAND
¿Estáis preparados para la carrera?
Recordad que el ganador o ganadora será quien complete primero 35 vueltas a la pista
Sí
¿Preparados?
¿Listos?
¡¡Píííí!!!
¡¡VAMOS ALLÁ!!
¡¡BRUUUUM!!
¿Pero que se piensan estos dos? Se van a enterar. ¡¡En la próxima curva los adelanto!!
Para ser conductor de primera... la la la
¿Pero cómo lo ha hecho? ¡Qué rápida!
¡¡¿A ver quien me adelanta ahora?!! ¡¡¡Os espero en la meta!!!

www.maths4everything.com

REPARTIENDO A LO GRANDE

www.maths4everything.com