DOSSIER SEMANAL 08

MATEMÁTICAS II

Por Pedro A. Martínez

PROBLEMA 1: **Discute y resuelve** (siempre que sea posible) el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función de los parámetros reales λ y μ:

$$\left.\begin{array}{r} \lambda x + y + z = \mu \\ x + y + \lambda z = 2 \\ 2x + y + \lambda z = \mu \end{array}\right\}$$

Discutiremos el sistema utilizando el teorema de Rouchè-Fröbenius. Para ello necesitaremos averiguar el rango de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada asociadas al sistema según los valores de los parámetros λ y μ.

$$\left.\begin{array}{r} \lambda x + y + z = \mu \\ x + y + \lambda z = 2 \\ 2x + y + \lambda z = \mu \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 2 & 1 & \lambda \end{array}}_{A}\left|\begin{array}{c} \mu \\ 2 \\ \mu \end{array}\right.\right) = A^*$$

Comenzaremos analizando el rango de la matriz de coeficientes. Para ello, calcularemos el valor de su determinante en función del parámetro real λ:

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 2 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 1 - 2 - \lambda - \lambda^2 = \lambda - 1$$

Para discutir el rango de la matriz debemos averiguar qué valores del parámetro λ, anulan este determinante. Es decir:

$$|A| = \lambda - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1$$

Esto nos permite distinguir dos casos posibles:

CASO I: $\lambda \neq 1$	
$\left(\begin{array}{ccc\|c} \lambda & 1 & 1 & \mu \\ 1 & 1 & \lambda & 2 \\ 2 & 1 & \lambda & \mu \end{array}\right)$	En este caso, dado que el determinante de la matriz de coeficientes no es cero, podemos asegurar que el rango de dicha matriz es 3. Así mismo, la matriz ampliada como mucho puede tener rango 3 y dado que contiene a la matriz A que es de rango 3, podemos concluir que su rango también es tres. Como conclusión, según el Teorema de Rouchè-Fröbenius el sistema en este caso quedaría clasificado como **SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO** ya que: $R(A) = R(A^*) = 3 = NUM.INCÓGNITAS$

Para resolverlo, aplicaremos la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \mu & 1 & 1 \\ 2 & 1 & \lambda \\ \mu & 1 & \lambda \end{vmatrix}}{\lambda - 1} \overset{F3'=F3-F1}{=} \frac{\begin{vmatrix} \mu & 1 & 1 \\ 2 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix}}{\lambda - 1} = \frac{(\lambda - 1) \cdot \begin{vmatrix} \mu & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\lambda - 1} = \frac{(\lambda - 1) \cdot (\mu - 2)}{\lambda - 1} = \mu - 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & \mu & 1 \\ 1 & 2 & \lambda \\ 2 & \mu & \lambda \end{vmatrix}}{\lambda - 1} = \frac{2\lambda^2 + 2\mu\lambda + \mu - 4 - \mu\lambda^2 - \mu\lambda}{\lambda - 1} = \frac{(2 - \mu)\lambda^2 + \mu\lambda + \mu - 4}{\lambda - 1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 1 & \mu \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & \mu \end{vmatrix}}{\lambda - 1} \overset{F3'=F3-F1}{=} \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 1 & \mu \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 - \lambda & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\lambda - 1} = \frac{(2 - \lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1 & \mu \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\lambda - 1} = \frac{(2 - \lambda) \cdot (2 - \mu)}{\lambda - 1}$$

Así pues, la solución del sistema será:

$$(x, y, z) = \left(\mu - 2, \frac{(2 - \mu)\lambda^2 + \mu\lambda + \mu - 4}{\lambda - 1}, \frac{(2 - \lambda) \cdot (2 - \mu)}{\lambda - 1} \right)$$

CASO II: $\lambda = 1$	
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & \mu \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & \mu \end{array}\right)$	En este caso, sabemos que la matriz de coeficiente no es de rango 3. De hecho, dado que existe al menos un menor de orden 2 que no es nulo, podemos afirmar que: $$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad Rg(A) = 2$$ Ahora bien, el rango de la matriz ampliada depende en este caso del valor del parámetro real μ, por lo que deberemos estudiar los posibles subcasos.

Analicemos pues todos los menores de orden 3 de la matriz ampliada para averiguar cuando el rango de ésta puede ser 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \mu \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & \mu \end{vmatrix} \overset{F3=F3-F1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \mu \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \mu \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - \mu \quad \Rightarrow \quad 2 - \mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \mu \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & \mu \end{vmatrix} = 0 \quad \textit{pues hay dos columnas iguales}$$

Así pues, se presentan dos subcasos:

SUBCASO I: $\lambda = 1$ **y** $\mu \neq 2$	
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & \mu \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & \mu \end{array}\right)$	En este subcaso, sabemos que la matriz ampliada tiene un menor de orden 3 que no es nulo y como consecuencia su rango será tres. Así pues, dado que: $$2 = R(A) \neq R(A^*) = 3$$ por el Teorema de Rouchè-Frobënius, podemos afirmar que el sistema es **INCOMPATIBLE**.

<table>
<tr><td colspan="2">SUBCASO II: $\lambda = 1$ y $\mu = 2$</td></tr>
<tr><td>$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$</td><td>En este subcaso, tendremos que:
$$R(A) = R(A^*) = 2 < n^o\, incógnitas$$
por el Teorema de Rouchè-Frobënius, podemos afirmar que el sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO.</td></tr>
</table>

Vamos a resolver este último subcaso. Utilizaremos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{\substack{F2=F2-F1 \\ F3'=F3-2F1}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{F3 \leftrightarrow F2}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Tenemos en el sistema un grado de libertad. Denotando, $z = \alpha$ como parámetro real:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ y+z=2 \\ z=\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=2-(2-\alpha)-\alpha \\ y=2-\alpha \\ z=\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ y=2-\alpha \\ z=\alpha \end{array}\right\} \quad con\ \alpha \in R$$

Resumiendo el estudio del sistema:

CASO	TIPO DE SISTEMA	SOLUCIÓN
$\lambda \neq 1$	COMPATIBLE DETERMINADO	$\left.\begin{array}{l} x=\mu-2 \\ y=\dfrac{(2-\mu)\lambda^2+\mu\lambda+\mu-4}{\lambda-1} \\ z=\dfrac{(2-\lambda)\cdot(2-\mu)}{\lambda-1} \end{array}\right\}$
$\lambda = 1$ y $\mu \neq 2$	INCOMPATIBLE	No tiene solución
$\lambda = 1$ y $\mu = 2$	COMPATIBLE INDETERMINADO	$\left.\begin{array}{r} x=0 \\ y=2-\alpha \\ z=\alpha \end{array}\right\} \quad con\ \alpha \in R$

PROBLEMA 2: Considera la matriz cuadrada: $A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 3 & -5 & 6\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$

a) **Comprueba** que la matriz A verifica la relación $A^2+4\cdot(A+I)=0$.

b) **Calcula** (si existe) la matriz A^{-1}

c) **Halla** los valores reales x e y para los cuales se verifica $A^{-1}=xA+yI$

a) Comprobemos que la matriz propuesta verifica la relación sugerida:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 3 & -5 & 6\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 3 & -5 & 6\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 3 & -5 & 6\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 4 & -8\\ -12 & 16 & -24\\ -4 & 4 & -4\end{pmatrix}$$

$$4\cdot(A+I)=4\cdot\left[\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 3 & -5 & 6\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right]=4\cdot\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 3 & -4 & 6\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -4 & 8\\ 12 & -16 & 24\\ 4 & -4 & 4\end{pmatrix}$$

Así pues, se observa fácilmente que:

$$A^2+4\cdot(A+I)=\begin{pmatrix}0 & 4 & -8\\ -12 & 16 & -24\\ -4 & 4 & -4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -4 & 8\\ 12 & -16 & 24\\ 4 & -4 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

b) Primeramente vamos a comprobar que la matriz A tiene inversa. Para ello, calcularemos su determinante y observaremos que no es cero:

$$|A|=\begin{vmatrix}-1 & -1 & 2\\ 3 & -5 & 6\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=-6-6+10-6=-8\neq 0$$

En consecuencia, la matriz A es regular (o invertible) y podemos obtener su matriz inversa. Esta inversa podría calcularse mediante el uso del procedimiento por determinantes o el método de Gauss-Jordan. No obstante, aquí lo haremos de forma más rápida aprovechando que la matriz A verifica la relación propuesta en el apartado anterior (apartado a). Basta con observar que:

$$A^2+4\cdot(A+I)=0 \quad\Rightarrow\quad A^2+4A+4I=0 \quad\Rightarrow\quad A^2+4A=-4I \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad A\cdot(A+4I)=-4I \Rightarrow\quad A\cdot\left(\frac{A+4I}{-4}\right)=I \Rightarrow\quad A^{-1}=-\frac{1}{4}\cdot(A+4I)$$

Por tanto:

$$A^{-1}=-\frac{1}{4}\cdot(A+4I)=-\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 3 & -1 & 6\\ 1 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

c) Comparando la expresión propuesta con la obtenida durante la resolución del apartado anterior:

$$A^{-1}=xA+yI$$
$$A^{-1}=-\frac{1}{4}\cdot(A+4I)=-\frac{1}{4}\cdot A-I$$

Observamos fácilmente que:

$$x=-\frac{1}{4} \qquad y=-1$$

PROBLEMA 3: Se sabe que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales. Además, verifican que $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=7$ y $\|\vec{u}+\vec{v}\|=5$. Halla el módulo de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Dado que:

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=7 \;\Rightarrow\; \vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{v}\cdot\vec{v}=7 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{v}\cdot\vec{v}=7 \;\Rightarrow\; \|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2=7$$

Y como:

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|=5 \;\Rightarrow\; \|\vec{u}+\vec{v}\|^2=25 \;\Rightarrow\; (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})=5 \;\Rightarrow\; \vec{u}\cdot\vec{u}+2\cdot\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v}=5$$

Pero como los vectores u y v son ortogonales (es decir, su producto escalar es cero):

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=25 \;\Rightarrow\; \vec{u}\cdot\vec{u}+2\cdot\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v}=25 \;\Rightarrow\; \vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}=25 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2=25$$

Realizando un sistema de ecuaciones, obtenemos que:

$$\left.\begin{array}{l}\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2=7\\ \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2=25\end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \|\vec{u}\|=4 \quad \|\vec{v}\|=3$$

DOSSIER SEMANAL 08

MATEMÁTICAS II

Por Pedro A. Martínez

PROBLEMA 4: Calcula la **derivada** de las siguientes funciones reales de variable real:

1) $f(x)=5^x\cdot 7^x$ 2) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 3) $f(x)=x\cdot e^x$

4) $f(x)=Ln\left(e^{2x-5}\right)$ 5) $f(x)=\dfrac{3^x}{x-1}$ 6) $f(x)=5^x\cdot Ln\,x$

Para la resolución de esta actividad utilizaremos las reglas de derivación del producto y el cociente de dos funciones, cuyas expresiones vamos a recordar a continuación:

$$h(x)=f(x)\cdot g(x)\quad\Rightarrow\quad h'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

$$h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\quad\Rightarrow\quad h'(x)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

También haremos uso de la derivada de una función logarítmica y exponencial:

$$h(x)=\log_a f(x)\quad\rightarrow h'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}\cdot\frac{1}{Ln\,a}$$

$$h(x)=ln\,f(x)\quad\rightarrow h'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$h(x)=\mathrm{a}^{f(x)}\quad\rightarrow h'^{(x)}=\mathrm{a}^{f(x)}\cdot Ln\,a$$

$$h(x)=\mathrm{e}^{f(x)}\quad\rightarrow h'^{(x)}=\mathrm{e}^{f(x)}$$

También aplicaremos (en algún momento) las propiedades de los logaritmos y potencias para facilitar y acelerar el proceso de cálculo de alguna derivada.

1) Para obtener la derivada de esta función aplicaremos primero propiedades de las potencias ya que nos facilitará el cálculo de la deriva notablemente:

$$f(x)=5^x\cdot 7^x=35^x\rightarrow\ f'(x)=35^x\cdot Ln\,35$$

2) Aunque la función se presenta como un cociente, al ser el denominador un escalar, podemos expresar la función de otra forma para no tener que aplicar la derivada de un cociente:

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \cdot (e^x - e^{-x})$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^x - (-1) \cdot e^{-x}) = \frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x}) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

3) Aquí, derivaremos el producto propuesto:

$$f(x) = x \cdot e^x \quad \rightarrow \quad f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (1 + x) \cdot e^x$$

4) Aplicando previamente propiedades de los logaritmos, la derivación se hace muy sencilla:

$$f(x) = Ln(e^{2x-5}) = (2x-5) \cdot Ln\, e = \; (2x-5) \cdot 1 = 2x - 5$$

$$\rightarrow \quad f'(x) = 2$$

5) Aplicamos aquí la derivada de un cociente:

$$f(x) = \frac{3^x}{x-1} \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{3^x \cdot Ln\, 3 \cdot (x-1) - 1 \cdot 3^x}{(x-1)^2} = \frac{3^x \cdot Ln\, 3 \cdot (x-1) - 3^x}{(x-1)^2}$$

6) Se trata de aplicar la derivada de un producto:

$$f(x) = 5^x \cdot Ln\, x \rightarrow \quad f'(x) = 5^x \cdot Ln\, 5 \cdot Ln\, x + 5^x \cdot \frac{1}{x} = 5^x \cdot Ln\, 5 \cdot Ln\, x + \frac{5^x}{x}$$